

曹艳华,朱挺欣,王军.2 维地震波场的精确解及其无网格数值模拟 [J].江西师范大学学报(自然科学版),2022,46(3):262-267.

CAO Yanhua, ZHU Tingxin, WANG Jun. The exact solution and meshless numerical simulation of two-dimensional seismic wave field [J]. Journal of Jiangxi Normal University( Natural Science), 2022, 46(3): 262-267.

文章编号: 1000-5862(2022)03-0262-06

## 2 维地震波场的精确解及其无网格数值模拟

曹艳华,朱挺欣,王 军

(华东交通大学理学院,江西 南昌 330013)

摘要: 从波动理论出发,该文采用升降法推导出 2 维地震波场的精确解.在此基础上,采用近年来出现的无网格方法对 2 维地震波场进行了数值模拟,并对模拟的结果与传统的有限差分法进行了比较.数值算例表明:相比于传统的网格类方法,无网格方法的数值精度更高、稳定性更好、使用更灵活.

关键词: 2 维地震波场;有限差分法;无网格法

中图分类号: O 241.82 文献标志码: A DOI: 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2022.03.08

### 0 引言

地震波传播理论是地震波场正演模拟的基础,而地震波场的正演模拟又是在地震科学中一项非常重要的技术手段,它被广泛应用于地震勘探和天然地震中,在采集、处理和解释地震数据的过程中起着不可或缺的作用<sup>[1-3]</sup>.

地震波场的正演模拟主要有积分方程法<sup>[4]</sup>、波动方程法<sup>[5-6]</sup>、射线追踪法<sup>[7]</sup>等.波动方程法又可分为有限差分法、有限元法和谱方法等.本文首先通过升降法求出 2 维地震波场的精确解,再利用有限差分法和无网格方法对其进行数值模拟,进而对地震波场的运动状态、动力学特征进行详细分析.

传统的有限差分法是最早应用于微分方程的数值模拟方法,该方法的基本原理是利用差商近似代替在方程中的微商而得到的,该方法具有计算效率高、占用内存相对较小的优点,是在勘探地震学中应用最广泛的数值计算方法.汪勇等<sup>[8]</sup>在求解 2 维声波问题时基于频散关系分析思想,采用最小二乘法建立误差目标函数,再利用拉格朗日乘子法对目标

函数进行求解,得到了优化后具有 4~10 阶精度的有限差分格式,将 2 阶导数的五对角紧致差分格式扩展到  $2n$  阶精度. Peng Chong 等<sup>[9]</sup>针对颗粒流采用由泰勒展开和重整化方法得到的 2 阶一致空间格式提出一种新的拉格朗日差分动力学(LDD)方法.尽管传统的有限差分法在某些方面得到了改进,但是它只能对规则区域进行求解,非常依赖于网格的剖分,具有严重的数值频散性等缺点.

不同于传统的网格类方法,近年来发展起来的无网格方法是根据计算节点来近似而不需要网格连接的计算方法,该算法适用于各种规则和不规则区域的数值模拟,能够有效地解决网格类方法难以解决的问题.到目前为止,无网格方法已成功应用于 Helmholtz 方程<sup>[10]</sup>、微生物驱动数值模拟<sup>[11]</sup>、凹凸边界形状热弹性问题<sup>[12]</sup>、中心刚体-旋转柔性梁的动力学问题<sup>[13]</sup>等的研究中,这充分显示了无网格方法在求解相关问题时的优势.曹艳华等<sup>[14]</sup>提出的多项式特解法在求解微分方程时具有较高的数值精度,且算法极其稳定. Wu Shaowei 等<sup>[15]</sup>针对带修正的 Dirichlet-to-Neumann 边界条件水下声辐射问题,提出一种改进的无单元 Galerkin 插值(IEFG)方法.王

收稿日期: 2021-09-14

基金项目: 国家自然科学基金(11461026)和江西省第 11 批研究生优质课程和案例建设课题资助项目.

作者简介: 曹艳华(1978—),女,山东兖州人,副教授,博士,主要从事微分方程数值解法以及无网格方向研究. E-mail: yan-huacao@yeah.net

珊珊等<sup>[16]</sup>利用 Laplace 方程的基本解和径向基函数(RBFs)提出一种求解多连通域的 Poisson 方程柯西问题的无网格数值方法.曹艳华等<sup>[17]</sup>将多项式特解法与 Houbolt 方法相结合,提出一种发展方程的混合方法,该方法在初始时刻采用高精度的时空多项式特解法对发展方程进行求解,获得的高精度数值解作为 Houbolt 方法的初值.田巧娴等<sup>[18]</sup>提出了数值求解 3 维热传导方程的一种无条件稳定的高精度半显式差分方法.M. Hussain 等<sup>[19]</sup>对变系数的时间分数阶高阶扩散波方程(TFHODWEs)提出基于隐式时间步进算法的无网格谱插值方法,通过径向基函数(RBFs)和点插值方法(PIM)得到无网格形函数,对微分方程进行求解.李订芳等<sup>[20]</sup>提出了一种基于截断奇异值分解(TSVD)的正则化和径向基函数(RBF)的改进的无网格方法.

本文讨论如下 2 维地震波方程:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, y, t) = a^2 \Delta u(x, y, t) & (x, y, t) \in \mathbf{R}^2 \times (0, \infty), \\ u(x, y, 0) = x^2(x + y), & (x, y) \in \mathbf{R}^2, \\ u_t(x, y, 0) = 0, & (x, y) \in \mathbf{R}^2, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ . 采用升降法推导出 2 维地震波场的精确解,采用无网格方法对 2 维地震波场进行了数值模拟,并对模拟的结果与传统的有限差分法进行比较.本文的无网格方法具体采用改进的时空多项式特解法,该算法将原来空间上的  $d$  维问题转换为时空域上的  $d + 1$  维问题,并结合多尺度技术减少特解法生成矩阵的条件数,使得多项式基函数在多项式基阶变高时是稳定的.

## 1 2 维地震波方程的精确解

本部分讨论初值问题(1)的精确解,下面给出一些定义及引理.

定义 1<sup>[19]</sup> 设  $l(x, y) \in \mathbf{R}^2, t > 0, r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$  定义

$$U(l; r, t) = \int_{\partial B(l, r)} u(\mathbf{m}, t) dS(\mathbf{m}), \quad (2)$$

其中  $B(l, r)$  是以  $l$  为圆心,  $r$  为半径的圆,  $\partial B(l, r)$  为圆周,  $U(l; r, t)$  为在圆周  $\partial B(l, r)$  上函数  $u(\cdot, t)$  的平均值.

定义 2<sup>[19]</sup> 类似地,令  $h(\mathbf{m}) = h(x, y) = 0$ ,  $g(\mathbf{m}) = g(x, y) = x^2(x + y)$  定义

$$G(l; r) = \int_{\partial B(l, r)} g(\mathbf{m}) dS(\mathbf{m}), \quad (3)$$

$$H(l; r) = \int_{\partial B(l, r)} h(\mathbf{m}) dS(\mathbf{m}). \quad (4)$$

引理 1<sup>[19]</sup> (欧拉-泊松-达布方程) 令  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ , 且  $u(x, y, t)$  满足方程(1). 不妨设  $a = 1$ , 则  $U(l; r, t)$  满足

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - U_r/r = 0 & (r, t) \in \mathbf{R}^+ \times (0, \infty), \\ U(l; r, 0) = G, & r \in \mathbf{R}^+, \\ U_t(l; r, 0) = 0, & r \in \mathbf{R}^+. \end{cases} \quad (5)$$

证 令  $\mathbf{m} = l + rz$ , 有

$$U(l; r, t) = \int_{\partial B(l, r)} u(\mathbf{m}, t) dS(\mathbf{m}) = \int_{\partial B(0, 1)} u(l + rz, t) dS(z).$$

利用  $\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial \Omega} \partial u / \partial \tilde{n} dS$ , 有

$$\begin{aligned} U_r(l; r, t) &= \int_{\partial B(0, 1)} Du(l + rz, t) z dS(z) = \\ &= \int_{\partial B(l, r)} Du(\mathbf{m}, t) (\mathbf{m} - l) / r dS(\mathbf{m}) = \int_{\partial B(l, r)} \partial u / \partial \tilde{n} dS(\mathbf{m}) = \\ &= r \int_{\partial B(l, r)} \Delta u(\mathbf{m}, t) dS(\mathbf{m}) / 2. \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)最后一个等式右边令  $r \rightarrow 0^+$ , 则  $\lim_{r \rightarrow 0^+} U_r(l; r, t) = 0$ . 根据式(1), 对式(6)继续计算得

$$\begin{aligned} U_r(l; r, t) &= \frac{r}{2} \int_{B(l, r)} \Delta u(\mathbf{m}, t) d\mathbf{m} = \\ &= \frac{r}{2} \int_{B(l, r)} u_{tt}(\mathbf{m}, t) d\mathbf{m} = \frac{1}{2\alpha(2)} \cdot \frac{1}{r} \int_{B(l, r)} u_{tt}(\mathbf{m}, t) d\mathbf{m}, \end{aligned}$$

其中  $\alpha(n)$  表示  $n$  维单位球的体积, 这里  $n = 2$ . 因此,

$$rU_{rr}(l; r, t) = \int_{B(l, r)} u_{tt}(\mathbf{m}, t) d\mathbf{m} / (2\alpha(2)),$$

所以

$$\begin{aligned} (rU_r(l; r, t))_r &= \int_{\partial B(l, r)} u_{tt}(\mathbf{m}, t) dS(\mathbf{m}) / (2\alpha(2)) = \\ &= r \int_{\partial B(l, r)} u_{tt}(\mathbf{m}, t) dS(\mathbf{m}) = rU_{tt}(l; r, t). \end{aligned}$$

接下来求 3 维问题的解. 同样, 不妨令  $a = 1$ . 当  $n = 3$  时, 式(5)变为

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - 2U_r/r = 0 & (r, t) \in \mathbf{R}^+ \times (0, \infty), \\ U(l; r, 0) = \tilde{G}, & r \in \mathbf{R}^+, \\ U_t(l; r, 0) = 0, & r \in \mathbf{R}^+, \\ \tilde{U}(0, t) = 0, & t \in (0, \infty). \end{cases}$$

下面消去  $2U_r/r$ , 令

$$\tilde{U} = rU, \quad (7)$$

$$\tilde{G} = rG, \quad (8)$$

$$\tilde{H} = rH = 0. \quad (9)$$

下面说明  $\tilde{U}$  是下列方程的解:

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 & (r, t) \in \mathbf{R}^+ \times (0, \infty), \\ \tilde{U}(r, 0) = \tilde{G}, & r \in \mathbf{R}^+, \\ \tilde{U}_t(r, 0) = 0, & r \in \mathbf{R}^+, \\ \tilde{U}(0, t) = 0, & t \in (0, \infty). \end{cases}$$

事实上 因为

$$\tilde{U}_u = rU_u = r(U_{rr} + 2U_r/r) = r\tilde{U}_{rr} + 2U_r = (U + rU_r)_r = \tilde{U}_{rr},$$

而  $\tilde{G}_r(0) = 0$  因此 利用 1 维波动方程的解公式

$$\tilde{U}(l; r, t) = (\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(r-t))/2. \quad (10)$$

由式(2)可知

$$u(l, t) = u(x, y, z, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} U_r(l; r, t),$$

其中  $l = (x, y, z)$ . 再由式(3) ~ (4)、(7) ~ (8)、(10) 可得

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} U_r(l; r, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} ((\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(r-t))/(2r)) = \tilde{G}'(t) = \partial(t \int_{\partial B(l, t)} g(m) dS(m)) / \partial t \\ &= \partial(t \int_{\partial B(0, 1)} g(l + tz) dS(z)) / \partial t = t \partial(\int_{\partial B(0, 1)} g(l + tz) dS(z)) / \partial t + \int_{\partial B(l, t)} g(m) dS(m) = t(\int_{\partial B(0, 1)} Dg(lx + tz) z dS(z)) + \int_{\partial B(l, t)} g(m) dS(m) = \int_{\partial B(l, t)} (Dg(m) \cdot (m - l) + g(m)) dS(m), \end{aligned}$$

于是,

$$u(x, y, z, t) = \int_{\partial B(l, t)} (Dg(m)(m - l) + g(m)) dS(m). \quad (11)$$

式(11)表示的是 3 维空间变量  $l = (x, y, z)$  的解. 下面采用降维方法求出 2 维空间变量  $l = (x, y)$  的精确解. 所谓降维法是指若方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) & (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^3 \times (0, \infty), \\ u(x, y, 0) = g(x, y), & (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \\ u_t(x, y, 0) = h(x, y), & (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \end{cases}$$

的解与  $z$  无关 则  $u = u(x, y, z, t)$  满足 2 维波动方程.

事实上 当  $n = 2$  时 假设  $u(x, y, t)$  是方程(1)的解 记

$$\bar{u}(x, y, z, t) = u(x, y, t), \quad (12)$$

那么方程(1)变成

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} = a^2(\bar{u}_{xx} + \bar{u}_{yy} + \bar{u}_{zz}) & (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^3 \times (0, \infty), \\ \bar{u}(x, y, z, 0) = \bar{g}(x, y, z) & (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \\ \bar{u}_t(x, y, z, 0) = 0, & (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \end{cases} \quad (13)$$

其中  $\bar{g}(x, y, z) = g(x, y) = x^2(x + y)$ . 若记  $l = (x, y) \in \mathbf{R}^2$   $\bar{l} = (x, y, 0) \in \mathbf{R}^3$  则根据 2 维情形的计算过程 有

$$\begin{aligned} u(l, t) &= \partial(t \int_{\partial B(l, t)} \bar{g}(m) d\bar{S}(m)) / \partial t = \frac{1}{2\pi a} \cdot \\ &\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{at} \int_0^{2\pi} r(x + r \cos \theta)^2 (x + r \cos \theta + y + r \sin \theta) / \end{aligned}$$

$$\sqrt{(at)^2 - r^2} d\theta dr. \quad (14)$$

化简式(14)得到方程(1)的精确解为

$$u(x, y, t) = x^2(x + y) + a^2 t^2(3x + y). \quad (15)$$

取  $a = 1$  当  $t = 0$  时 精确解为  $u(x, y) = x^2(x + y)$  (见图1). 当  $t = 1$  时 精确解为  $u(x, y, 1) = x^2(x + y) + 3x + y$  (见图2).

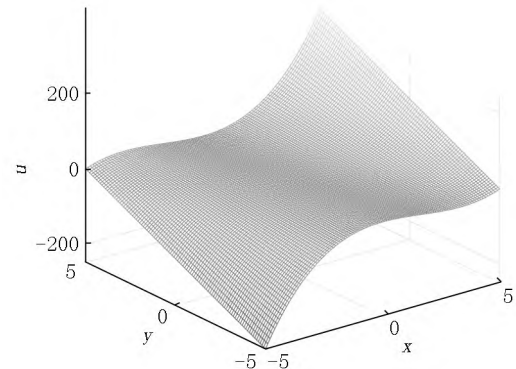


图1 当  $t = 0$  时的精确解

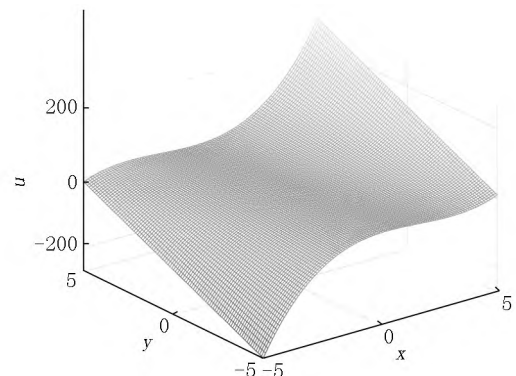


图2 当  $t = 1$  时的精确解

## 2 2 维地震波方程的数值解

### 2.1 有限差分法

本节讨论方程

$$\begin{cases} u_{tt}(x, y, t) = \Delta u(x, y, t) & (x, y, t) \in \Omega \times (0, T], \\ u(x, y, 0) = x^2(x + y) & (x, y) \in \Omega, \\ u_t(x, y, 0) = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y, t) = x^2(x + y) + t^2(3x + y), & (x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, T] \end{cases} \quad (16)$$

的有限差分法 其中  $\bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1], T = 1$ .

为了衡量数值算法的精度 定义如下误差:

$$R_{MSE} = \sqrt{\sum_{i=1}^N E_i^2 / N} \quad M_{AE} = \max_{1 \leq i \leq N} |E_i|,$$

其中  $N$  为测试点的个数  $E_i = u(x_i, y_i, t_i) - \bar{u}(x_i, y_i, t_i)$ .

$t_i$ ) 为精确解与数值解在插值点  $(x_i, y_i, t_i)$  处的误差.

2.1.1 差分格式的建立 第 1 步: 将求解区域  $\bar{\Omega} \times [0, 1]$  进行网格剖分. 取正整数  $m$  和  $n$ , 并记

$$x_i = ih, y_j = jh, 0 \leq i, j \leq m,$$

$$t_k = k\tau, 0 \leq k \leq n,$$

其中  $h = 1/m$  为空间步长,  $\tau = T/n$  为时间步长. 定义在该矩形网格上的网格函数为

$$u_H = \{u_{i,j}^k(x_i, y_j, t_k) | 0 \leq i, j \leq m, 0 \leq k \leq n\},$$

其中  $u_{i,j}^k(x_i, y_j, t_k)$  为在结点  $(x_i, y_j, t_k)$  处函数  $u(x_i, y_j, t_k)$  的近似值, 记为  $u_{i,j}^k$ .

第 2 步: 微分方程离散化. 利用泰勒级数展开得到

$$\partial^2 u(x_i, y_j, t_k) / \partial t^2 \approx (u_{i,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^k + u_{i,j}^{k-1}) / \tau^2, \quad (17)$$

$$\partial^2 u(x_i, y_j, t_k) / \partial x^2 \approx (u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k) / h^2, \quad (18)$$

$$\partial^2 u(x_i, y_j, t_k) / \partial y^2 \approx (u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k) / h^2, \quad (19)$$

代入方程 (16), 得到

$$(u_{i,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^k + u_{i,j}^{k-1}) / \tau^2 = (u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k) / h^2 + (u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k) / h^2. \quad (20)$$

因此, 建立的差分格式为

$$u_{i,j}^{k+1} = r^2(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k) + (2 - 4r^2)u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1}, \quad (21)$$

其中  $r = \tau/h$  为网格比, 局部截断误差为  $O(\tau^2 + h^2)$ .

2.1.2 数值结果 取空间步长  $h = 0.1$ 、时间步长  $\tau = 0.001$  并代入式 (21) 中, 则当  $t = 0.1$  时近似解在格点上的绝对误差如图 3 所示, 均方根误差为 0.009 3. 当  $t = 1.0$  时近似解在格点上的绝对误差如图 4 所示, 均方根误差为 0.671 9. 在本算例中, 网格比  $r = \tau/h = 0.01$ , 因此 3 层的差分格式收敛, 但计算精度整体不高, 故简单的有限差分格式不适合解此类发展方程.

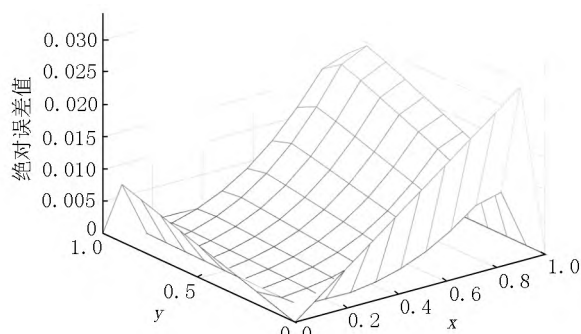


图 3 当  $t = 0.1$  时的近似解绝对值误差

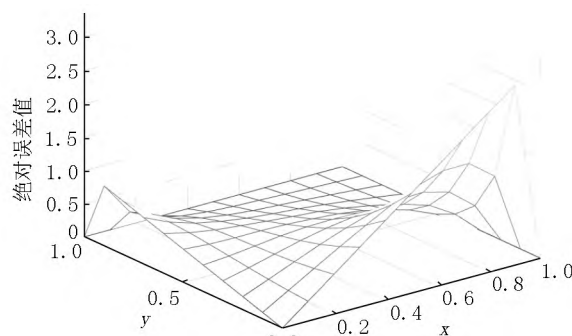


图 4 当  $t = 1.0$  时的近似解绝对值误差

## 2.2 无网格方法

2.2.1 时空多项式特解法 本节简要介绍运用时空多项式特解法求解 2 维地震波动方程的初边值问题的一般步骤.

考虑如下的 2 维地震波方程:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, y, t) - \Delta u(x, y, t) = f(x, y, t), \\ (x, y, t) \in \Omega \times (0, T], \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), (x, y) \in \Omega, \\ u_t(x, y, 0) = u_1(x, y), (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y, t) = g(x, y, t), (x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \end{cases} \quad (22)$$

其中函数  $f(x, y, t)$ 、 $u_0(x, y)$ 、 $u_1(x, y)$  和  $g(x, y, t)$  为给定函数.

假设方程 (22) 的解  $u(x, y, t)$  可以通过一组线性无关的特解多项式  $\Phi_{ijk}(x, y, t)$  的线性组合来近似

$$u(x, y, t) \approx \hat{u}(x, y, t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j+k \leq i} a_{ijk} \Phi_{ijk}(x, y, t), \quad (23)$$

其中  $\Phi_{ijk}(x, y, t)$  为满足  $L\Phi_{ijk}(x, y, t) = x^i y^j t^k$  的多项式, 微分算子  $L = \partial_{tt} - (\partial_{xx} + \partial_{yy}) + I$ .

取内点集合为  $\{(x_i, y_i, t_i)\}_{i=1}^{n_i} \subset \Omega \times (0, T)$ , 边界点集合为  $\{(x_i, y_i, t_i)\}_{i=n_i+1}^N \subset \partial\Omega \times (0, T) \cup \Omega \times \{t=0\}$ , 则式 (23) 中的待定系数  $\{a_{ijk}\}$  可由下式得到

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j+k \leq i} a_{ijk} x_l^i y_l^j t_l^k - \sum_{i=0}^m \sum_{j+k \leq i} a_{ijk} \Phi_{ijk}(x_l, y_l, t_l) = f(x_l, y_l, t_l), \quad l = 1, 2, \dots, n_i,$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j+k \leq i} a_{ijk} \Phi_{ijk}(x_l, y_l, 0) = u_0(x_l, y_l),$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j+k \leq i} a_{ijk} (\partial \Phi_{ijk})_t(x_l, y_l, 0) = u_1(x_l, y_l),$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j+k \leq i} a_{ijk} \Phi_{ijk}(x_l, y_l, t_l) = g(x_l, y_l, t_l), \quad l = n_i + 1, \dots, N.$$

$n_i + 2, \dots, N$ .

将求出的待定系数  $\{a_{ijk}\}$  代入式 (23), 得到方程

(22) 的近似解. 引理 2 提供了求特解多项式  $\Phi_{ijk}(x, y, t)$  的方法.

引理 2<sup>[21]</sup> 对于一般的 3 维 2 阶常系数微分方程, 令  $(w_1, w_2, w_3) = (x, y, t)$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} \partial^2 u_p / (\partial w_i \partial w_j) + \sum_{i=1}^3 b_j \partial u_p / \partial w_i + c u_p = x^m y^n t^l, \quad (24)$$

其中系数  $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^3, \{b_i\}_{i=1}^3$  和  $c$  是实常数, 且  $c \neq 0$ ,  $m, n$  和  $l$  分别为非负整数, 则式 (24) 的多项式特解由

$$u_p = \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{m+n+l} (-1/c)^k L^k (x^m y^n t^l)$$

给出, 其中  $L = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} \partial^2 / (\partial w_i \partial w_j) + \sum_{i=1}^3 b_j \partial / \partial w_i + cI$ .

2.2.2 数值结果 本节采用时空多项式特解法求 2 维地震波方程 (16). 在内点集合  $\{(x_i, y_i, t_i)\}_{i=1}^{n_i} \subset (0, 1) \times (0, 1) \times (0, T)$  内选取  $n_i = 5\,832$  个内点, 在边界点集合内  $\{(x_b, y_b, t_b)\}_{b=1}^{n_b} \subset \Omega \times \{t=0\} \cup \partial\Omega \times (0, T)$  选取  $n_b = 2\,096$  个边界点, 在内点集合中选取  $N = 2\,197$  个测试点, 数值模拟结果如表 1 所示. 在  $T = 1.0$  时的平方根误差和多项式阶的关系如图 5 所示. 由表 1 和图 5 可知: 当多项式的阶  $n = 4$  时, 均方根误差达到  $10^{-15}$ , 接近机器精度. 继续提高多项式的阶, 所得的数值结果精度稍有波动, 但仍保持相当好的稳定性, 这表明时空多项式特解法对 2 维地震波场的数值模拟非常有效. 相比于有限差分法, 无网格方法不需要任何网格剖分, 更无须确定网格时空比, 所得计算结果的精度及稳定性远远优于有限差分法.

表 1 时空多项式特解法求得的近似解的均方根误差

多项式的阶	$T = 1.0$	$T = 0.5$	$T = 0.1$
2	$2.22 \times 10^{-1}$	$1.94 \times 10^{-1}$	$2.33 \times 10^{-1}$
4	$2.83 \times 10^{-15}$	$3.39 \times 10^{-15}$	$1.65 \times 10^{-15}$
6	$3.00 \times 10^{-15}$	$2.32 \times 10^{-15}$	$4.02 \times 10^{-15}$
8	$7.84 \times 10^{-15}$	$4.55 \times 10^{-15}$	$3.92 \times 10^{-15}$
10	$6.74 \times 10^{-15}$	$1.48 \times 10^{-14}$	$5.47 \times 10^{-15}$
12	$5.93 \times 10^{-14}$	$2.91 \times 10^{-14}$	$4.11 \times 10^{-14}$
14	$2.87 \times 10^{-14}$	$3.45 \times 10^{-14}$	$2.58 \times 10^{-13}$
16	$5.65 \times 10^{-14}$	$9.00 \times 10^{-15}$	$1.62 \times 10^{-13}$
18	$2.40 \times 10^{-14}$	$2.00 \times 10^{-14}$	$2.06 \times 10^{-13}$
20	$3.09 \times 10^{-14}$	$3.39 \times 10^{-14}$	$2.31 \times 10^{-13}$

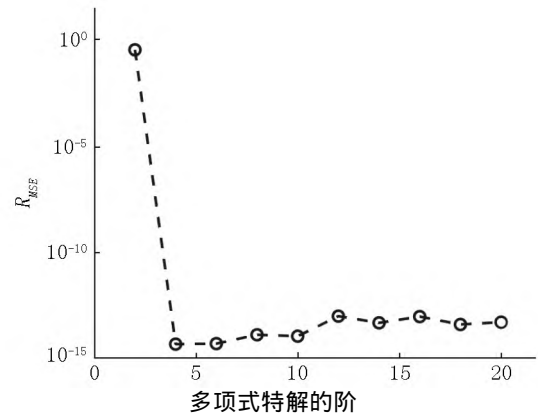


图 5 在  $t = 1.0$  时时空多项式特解的阶与均方根误差

### 3 结论

本文主要使用升降法研究 2 维地震波场的精确解及其数值模拟. 当采用有限差分法求解此类方程时, 算法精度不高. 当采用无网格类方法的时空多项式特解法时, 算法的精度很高, 接近机器精度, 而且算法的稳定性极好. 但基于配点法的无网格类方法需要一定数目的配点, 所得的系数矩阵为稠密矩阵. 随着多项式特解阶的提高, 系数矩阵的条件数增长较快. 下一步的工作是研究局部多项式特解法, 以期得到的系数矩阵为稀疏矩阵.

### 4 参考文献

- [1] 何樵登. 地震波理论 [M]. 北京: 地质出版社, 1988.
- [2] 姚姚. 地震波场与地震勘探 [M]. 北京: 地质出版社, 2006.
- [3] 汪玉乐, 雷苑. 地球物理数据处理教程 [M]. 北京: 地质出版社, 2006.
- [4] 张繁昌, 印兴耀, 赵剑. 慢度法全波场模拟及其水平慢度积分的实现 [J]. 石油地球物理勘探, 2003, 38(6): 597-602.
- [5] 孙卫涛. 弹性波动方程的有限差分数值方法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.
- [6] 裴正林, 牟永光. 地震波传播数值模拟 [J]. 地球物理学进展, 2004, 19(4): 933-941.
- [7] 宋维琪, 杨晓东. 基于射线追踪的微地震多波场正演模拟 [J]. 地球物理学进展, 2012, 27(4): 1501-1508.
- [8] 汪勇, 穆鹏飞, 蔡文杰, 等. 五对角紧致差分格式优化及二维声波传播波动方程数值模拟 [J]. 石油物探, 2019, 58(4): 486-498.
- [9] PENG Chong, BAŠIĆ M, BLAGOJEVIĆ B, et al. A La-

- grangian differencing dynamics method for granular flow modeling [J]. Computers and Geotechnics ,2021 ,137: 104297.
- [10] 杨苗苗,葛永斌.求解 Helmholtz 方程的无网格重心插值配点法 [J].应用数学 2021 ,34( 3) : 574-589.
- [11] 曹琳,修建龙,黄立信,等.基于无网格法的微生物驱数值模拟 [J].新疆石油地质 2021 ,42( 2) : 206-212.
- [12] 杨澜,蹇开林,张亮.凹凸边界形状热弹性问题的自适应无网格法 [J/OL].<http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1044.N.20210527.1003.004.html>.
- [13] 杜超凡,周晓婷,章定国,等.无网格法在中心刚体-旋转柔性梁系统动力学分析中的应用 [J].振动工程学报 2022 ,35( 1) : 178-187.
- [14] 曹艳华,李楠,张姊同,等.一维微分方程的多项式特解方法 [J].应用数学 2020 ,33( 2) : 295-307.
- [15] WU Shaowei,XIANG Yang,LIU Bao,et al.A weak-form interpolation meshfree method for computing underwater acoustic radiation [J]. Ocean Engineering ,2021 ,233: 109105.
- [16] 王珊珊,温瑾,王士娟.多连通域上泊松方程柯西问题的一种新型无网格方法 [J].理论数学 2021 ,11( 5) : 802-813.
- [17] CAO Yanhua,KUO L H.Hybrid method of space-time and Houbolt methods for solving linear time-dependent problems [J].Engineering Analysis with Boundary Elements , 2021 ,128: 58-65.
- [18] 田巧娴,杨国锋,葛永斌.三维热传导方程恒稳定的高精度半显式差分方法 [J].江西师范大学学报( 自然科学版) 2009 ,33( 1) : 56-60.
- [19] HUSSAIN M,HAQ S.Numerical simulation of higher-order diffusion-wave equations of variable coefficients using the meshless spectral method [J]. International Journal of Modern Physics C 2021 ,32( 1) : 1-19.
- [20] 李订芳,谢鹏.基于 RBF 和 TSVD 正则化求解泊松方程 [J].江西师范大学学报( 自然科学版) ,2017 ,41( 1) : 42-45.
- [21] EVANS L C. Partial differential equations [M]. Providence: American Mathematical Society ,1997.

## The Exact Solution and Meshless Numerical Simulation of Two-Dimensional Seismic Wave Field

CAO Yanhua,ZHU Tingxin,WANG Jun

( School of Sciences ,East China Jiaotong University ,Nanchang Jiangxi 330013 ,China)

**Abstract:** Based on the wave theory and lifting method ,the exact solution of two-dimensional seismic wave field is derived.Then ,the meshless method is used to simulate the two-dimensional seismic wave field ,and the approximate solution is analyzed and compared to traditional finite difference method.Numerical example shows that the meshless method has more higher accuracy ,better stability and more flexibility.

**Key words:** two-dimensional seismic wave field; finite difference method; meshless method

( 责任编辑: 曾剑锋)