张少吟,宁菊红,黄文平. Laplace-Stieltjes 变换的广义型[J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2022,46(4):331-334.
ZHANG Shaoyin,NING Juhong,HUANG Wenping. The generalized type of Laplace-Stieltjes transform[J]. Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science),2022,46(4):331-334.

文章编号:1000-5862(2022)04-0331-04

Laplace-Stieltjes 变换的广义型

张少吟[1],宁菊红[1*],黄文平[2]
(1. 江西师范大学数学与统计学院,江西 南昌 330022;2. 陆军步兵学院基础部,江西 南昌 330103)

摘要:通过引入有限级和无限级的广义型概念,该文讨论了 Laplace-Stieltjes 变换在全平面上的增长性,得到了由最大模、最大项所表示的广义型和由系数、指数所表示的广义型之间的等价关系,推广了已有的相关结果.

关键词:Laplace-Stieltjes 变换;最大模;最大项;有限级;无限级;广义型
中图分类号:O 174.52　**文献标志码**:A　**DOI**:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2022.04.01

0 引言与预备知识

Laplace-Stieltjes(L-S)变换[1]

$$F(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-sy}\mathrm{d}\alpha(y)\ (s=\sigma+\mathrm{i}t),\tag{1}$$

其中 $\alpha(y)$ 是在区间 $[0,X](0<X<+\infty)$ 上的有界变差函数,σ 和 t 是实数,实数序列 $\{\lambda_n\}$,$0=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n<\cdots$,$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$,满足

$$\limsup_{n\to\infty}(\ln n)/\lambda_n=D<+\infty,\ \limsup_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)<+\infty.\tag{2}$$

文献[2]研究得到:若 L-S 变换(1)满足条件

$$\limsup_{n\to\infty}(\ln A_n^*)/\lambda_n=-\infty,\tag{3}$$

其中

$$A_n^*=\sup_{\lambda_n<x\leqslant\lambda_{n+1},-\infty<t<+\infty}\left|\int_{\lambda_n}^{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ty}\mathrm{d}\alpha(y)\right|,$$

则 $\sigma_u^F=-\infty$,其中 σ_u^F 是 L-S 变换(1)的一致收敛横坐标. 若 σ_a^F 是 L-S 变换(1)的收敛横坐标,则显然有 $\sigma_a^F\leqslant\sigma_u^F$,因此若 L-S 变换(1)满足条件(3),则有 $\sigma_a^F=\sigma_u^F=-\infty$,从而 L-S 变换(1)在复平面上解析,即 $F(s)$ 是一个整函数.

类似于文献[2],引入 $F(s)$ 的最大模 $M_u(\sigma,F)$ 和最大项 $\mu(\sigma,F)$ 如下:

$$M_u(\sigma,F)=\sup_{0<x<+\infty,-\infty<t<+\infty}\left|\int_0^x\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}t)}\mathrm{d}\alpha(x)\right|,$$

$$\mu(\sigma,F)=\max_{1\leqslant n<+\infty}A_n^*\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma}.$$

文献[2]还研究了最大模和最大项的关系,并得到如下结果.

引理 1[2]　若 L-S 变换(1)满足条件(2)和条件(3),则 $\forall\varepsilon>0$,当 $-\sigma$ 充分大时,有

$$\mu(\sigma,F)/2\leqslant M_u(\sigma,F)\leqslant\mu(\sigma-D-\varepsilon,F).$$

为了研究 L-S 变换(1)所表示的整函数 $F(s)$ 的增长性,类似于 Dirichlet 级数,定义其级如下.

定义 1[3]　L-S 变换(1)所表示的整函数 $F(s)$ 的级定义为

$$\rho=\limsup_{\sigma\to-\infty}(\ln^+\ln^+M_u(\sigma,F))/(-\sigma),$$

其中 $\ln^+x=\max\{\ln x,0\}$. 若 $0\leqslant\rho<+\infty$,则称 $F(s)$ 具有有限级;若 $\rho=+\infty$,则称 $F(s)$ 具有无限级.

为了区分具有相同级 $\rho(0<\rho<+\infty)$ 的 L-S 变换的增长性,引入型的定义.

定义 2[3]　若 $\rho\in(0,+\infty)$,则 L-S 变换(1)所表示的整函数 $F(s)$ 的型定义为

$$\tau=\limsup_{\sigma\to-\infty}(\ln^+M_u(\sigma,F))/\mathrm{e}^{-\sigma\rho}.$$

关于 L-S 变换的增长性的研究,目前已得到一系列深刻的结果[3-15],这些文献分别研究了在全平面上解析的 L-S 变换所表示整函数的零级、有限级、无限级、型及其值分布. 本文主要研究在全平面上解析的 L-S 变换所表示整函数的有限级及无限级的广义型.

收稿日期:2022-01-06
基金项目:国家自然科学基金(11661044)资助项目.
通信作者:宁菊红(1977—),女,河南三门峡人,副教授,博士,主要从事复分析研究. E-mail:ningjuh@163.com

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

1 有限级的广义型

本节主要研究具有有限级的 L-S 变换的广义型.

定义 3 仿照文献[3],对 L-S 变换(1),若 $\rho\in(0,+\infty)$ 由定义 1 所定义,$\rho(r)$ 是连续函数且满足 $\lim\limits_{r\to+\infty}\rho(r)=\rho$,$\lim\limits_{r\to+\infty}\rho'(r)r\ln r=0$,则定义 τ_1 如下:

$$\tau_1=\limsup_{\sigma\to-\infty}(\ln^+M_u(\sigma,F))/U(\mathrm{e}^{-\sigma}),$$

其中称 $U(r)=r^{\rho(r)}(r>0)$ 为型函数,称 $\rho(r)$ 为准确级,τ_1 是关于 $U(r)$ 的型.

注 1 若定义 3 中的 $\rho(r)\equiv\rho$,则型 $\tau_1\equiv\tau$,即此时广义型 τ_1 为定义 2 的普通型 τ.

引理 2[7] 令 $t=U(r)$,$r=W(t)(r>0,t>0)$ 互为反函数,则有

(i) $U(kr)=(k^\rho+o(1))U(r)(r\to+\infty)$;

(ii) $W(kt)=(k^{1/\rho}+o(1))W(t)(t\to+\infty)$;

(iii) $tW'(t)/W(t)=1/(\rho+o(1))(t\to+\infty)$.

引理 3[3] 若 τ' 和 $-\sigma$ 是正数,则当 $-\sigma$ 充分大时,函数 $X(\lambda)=\lambda((\ln\tau'\mathrm{e}\rho)/\rho-\ln W(\lambda)-\sigma)$ 有最大值

$$(1/\rho+o(1))U((\tau'\rho)^{1/\rho}\mathrm{e}^{-\sigma}(1-o(1))).$$

引理 4[3] 若 α 和 λ 是正数,则当 λ 充分大时,函数 $\varphi(\sigma)=\alpha U(\mathrm{e}^{-\sigma})+\lambda\sigma$ 有最小值

$$\lambda/(\rho+o(1))-\lambda\ln(W(\lambda)/(\rho^{1/\rho}\alpha^{1/\rho}+o(1))).$$

定理 1 若 L-S 变换(1)所表示的整函数 $F(s)$ 满足条件(2)和条件(3),具有型 τ_1,若记 $M=\limsup\limits_{n\to\infty}(W^\rho(\lambda_n)A_n^{*\,\rho/\lambda_n}/(\mathrm{e}\rho))$,则 $M\leqslant\tau_1\leqslant\mathrm{e}^{\rho D}M$.

证 先证 $\tau_1\leqslant\mathrm{e}^{\rho D}M$. 若 $M=+\infty$,则显然成立. 若 $0\leqslant M<+\infty$,则由

$$M=\limsup_{n\to\infty}(W^\rho(\lambda_n)A_n^{*\,\rho/\lambda_n}/(\mathrm{e}\rho))$$

知,$\forall\varepsilon>0$,当 n 充分大时,有 $W^\rho(\lambda_n)A_n^{*\,\rho/\lambda_n}/(\mathrm{e}\rho)<M+\varepsilon$,从而

$$\ln A_n^*\mathrm{e}^{-\lambda_n\sigma}\leqslant\lambda_n((\ln((M+\varepsilon)\mathrm{e}\rho))/\rho-\ln W(\lambda_n)-\sigma).$$

由引理 3 知,当 $-\sigma$ 充分大时,

$$\ln M_u(\sigma,F)\leqslant\ln\mu(\sigma-D-\varepsilon,F)\leqslant(1/\rho+o(1))\rho(M+\varepsilon)(1-o(1))^\rho\mathrm{e}^{\rho(D+\varepsilon)}U(\mathrm{e}^{-\sigma}).$$

因此

$$\tau_1=\limsup_{\sigma\to-\infty}(\ln^+M_u(\sigma,F))/U(\mathrm{e}^{-\sigma})\leqslant M\mathrm{e}^{\rho D}.$$

然后证明 $M\leqslant\tau_1$. 若 $\tau_1=+\infty$,则显然有 $M\leqslant\tau_1$. 若 $\tau_1<+\infty$,则由 $\tau_1=\limsup\limits_{\sigma\to-\infty}(\ln^+M_u(\sigma,F))/U(\mathrm{e}^{-\sigma})$ 的定义知,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\sigma_0<0$,$\forall\sigma<\sigma_0$,有 $(\ln^+M_u(\sigma,F))/U(\mathrm{e}^{-\sigma})\leqslant\tau_1+\varepsilon$,则 $M_u(\sigma,F)\leqslant\exp((\tau_1+\varepsilon)U(\mathrm{e}^{-\sigma}))$.

由引理 1 知 $\mu(\sigma,F)\leqslant 2M_u(\sigma,F)$,故 $\ln A_n^*\leqslant\ln 2+(\tau_1+\varepsilon)U(\mathrm{e}^{-\sigma})+\lambda_n\sigma$. 由引理 4 知 $\ln A_n^*\leqslant\ln 2+\lambda_n/(\rho+o(1))-\lambda_n\ln(W(\lambda_n)/(\rho^{1/\rho}(\tau_1+\varepsilon)^{1/\rho}+o(1)))$,则当 n 充分大时,$W^\rho(\lambda_n)A_n^{*\,\rho/\lambda_n}/(\mathrm{e}\rho)\leqslant\tau_1+\varepsilon$,由 ε 的任意性得到

$$M=\limsup_{n\to\infty}W^\rho(\lambda_n)A_n^{*\,\rho/\lambda_n}/(\mathrm{e}\rho)\leqslant\tau_1.$$

定理 2 若 L-S 变换(1)所表示的整函数 $F(s)$ 满足条件(2)和条件(3),具有型 τ_1. 若记 $T=\limsup\limits_{n\to\infty}\lambda_n/(\mathrm{e}\rho U(A_n^{*\,-1/\lambda_n}))$,则 $M=T$.

证 记 $P=\limsup\limits_{n\to\infty}W^\rho(\lambda_n)A_n^{*\,\rho/\lambda_n}$,$Q=\limsup\limits_{n\to\infty}\lambda_n/U(A_n^{*\,-1/\lambda_n})$,则定理等价于要证 $P=Q$.

先证 $Q\leqslant P$. 若 $P=+\infty$,则显然有 $Q\leqslant P$. 若 $0\leqslant P<+\infty$,则由于 $P=\limsup\limits_{n\to\infty}W^\rho(\lambda_n)A_n^{*\,\rho/\lambda_n}$,所以 $\forall\varepsilon>0$,当 n 充分大时,有 $W^\rho(\lambda_n)A_n^{*\,\rho/\lambda_n}<P+\varepsilon$,从而有 $W(\lambda_n)/(P+\varepsilon)^{1/\rho}<A_n^{*\,1/(-\lambda_n)}$,由 $U(r)$ 的递增性和引理 2 有 $Q=\limsup\limits_{n\to\infty}\lambda_n/(\mathrm{e}\rho U(A_n^{*\,-1/\lambda_n}))\leqslant P$. 反之,同理可证 $P\leqslant Q$. 综上,$P=Q$. 定理 2 得证.

在一些特殊情况下,定理 1 和定理 2 有如下推论.

推论 1 若 $D=0$,则在定理 1 的条件下有

$$\tau=\limsup_{\sigma\to-\infty}(\ln^+M_u(\sigma,F))/U(\mathrm{e}^{-\sigma})=\limsup_{n\to\infty}W^\rho(\lambda_n)A_n^{*\,\rho/\lambda_n}/(\mathrm{e}\rho)=\limsup_{n\to\infty}\lambda_n/(\mathrm{e}\rho U(A_n^{*\,-1/\lambda_n})).$$

注 2 推论 1 是在文献[3]中的定理 1.

推论 2 若 $\rho(r)\equiv\rho\in(0,\infty)$,则在定理 1 的条件下有

$$\limsup_{n\to\infty}\lambda_nA_n^{*\,\rho/\lambda_n}/(\rho\mathrm{e})\leqslant\tau=\limsup_{\sigma\to-\infty}(\ln^+M_u(\sigma,F))/\mathrm{e}^{-\sigma\rho}\leqslant\mathrm{e}^{\rho D}\limsup_{n\to\infty}\lambda_nA_n^{*\,\rho/\lambda_n}/(\rho\mathrm{e}).$$

进一步,若 $D=0$,则显然有

$$\tau=\limsup_{\sigma\to-\infty}(\ln^+M_u(\sigma,F))/\mathrm{e}^{-\sigma\rho}=\limsup_{n\to\infty}\lambda_n\cdot A_n^{*\,\rho/\lambda_n}/(\rho\mathrm{e}).$$

注 3 推论 2 是在文献[6]中的定理 2.

2 无限级的广义型

前面讨论了当 $F(s)$ 为有限级时它的准确级的广义型,下面讨论当 $F(s)$ 为无限级时它的准确级的广义型. 为此,仿照定义 3 给出如下定义.

定义 4 L-S 变换(1)所表示的整函数 $F(s)$ 的 p 级定义为

$$\rho_p=\limsup_{\sigma\to-\infty}(\ln_{p+1}^+M_u(\sigma,F))/(-\sigma)(p=1,2,\cdots),$$

其中 $\ln_0x=x$,$\ln_px=\ln(\ln_{p-1}x)$,称 ρ_p 为 $F(s)$ 的 p 级.

本节主要研究 p 级对应的广义型,然后再返回一般的型. 接下来类似给出 p 级对应的广义型的定义.

定义 5 仿照定义 3,对 L-S 变换(1),若 $\rho_p\in(0,+\infty)$ 由定义 4 所定义,$\rho(r)$ 是连续函数且满足 $\lim\limits_{r\to+\infty}\rho(r)=\rho_p$,$\lim\limits_{r\to+\infty}\rho'(r)r\ln r=0$,则定义 τ_p 如下:

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\tau_p = \limsup_{\sigma\to-\infty}(\ln_p M_u(\sigma,F))/U(e^{-\sigma})\ (p=1,2,\cdots)$，其中称 $U(r) = r^{\rho(r)}\ (r>0)$ 为型函数，称 $\rho(r)$ 为准确级，τ_p 是关于 $U(r)$ 的型.

注4　显然当 $p=1$ 时，级 ρ_p 就是在定义1中的级 ρ，广义型 τ_p 就是在定义3中的广义型 τ_1. 即定义1和定义3分别是定义4和定义5的特殊情况. 当 $p=1$ 时所对应的广义型 τ_1 已经在第1节讨论，本节主要讨论当 $p=2,3,\cdots$ 时的广义型 τ_p.

定理3　若 L-S 变换(1)所表示的整函数 $F(s)$ 满足条件(2)和条件(3)，具有型 $\tau_p(p=2,3,\cdots)$. 若记 $M_p = \limsup_{n\to\infty} W^{\rho_p}(\ln_{p-1}\lambda_n)A_n^{*\,\rho_p/\lambda_n}$，则 $M_p \leqslant \tau_p \leqslant e^{\rho D}M_p$.

证　先证 $M_p\leqslant\tau_p$. 若 $\tau_p=+\infty$，则显然成立. 若 $0\leqslant\tau_p<+\infty$，则由

$\tau_p = \limsup_{\sigma\to-\infty}(\ln_p^+ M_u(\sigma,F))/U(e^{-\sigma})\ (p=2,3,\cdots)$

知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\sigma_1<0$，$\forall\sigma<\sigma_1$，有 $\ln_p M_u(\sigma,F)\leqslant(\tau_p+\varepsilon)U(e^{-\sigma})$，则

$$M_u(\sigma,F)\leqslant\exp_p((\tau_p+\varepsilon)U(e^{-\sigma}))，$$

其中 $\exp_0(x)=x$，$\exp_1(x)=e^x$，$\exp_2(x)=e^{e^x}$，$\cdots$，$\exp_p(x)=\exp_{p-1}e^x$.

由引理1知，若任意给定 $\sigma<\sigma_1$，对所有正整数 $n=1,2,\cdots$，有

$$A_n^* e^{-\lambda_n\sigma}\leqslant\mu(\sigma,F)\leqslant 2M_u(\sigma,F)\leqslant 2\exp_p((\tau_p+\varepsilon)U(e^{-\sigma}))，$$

则

$$\ln A_n^*\leqslant\ln 2+\exp_{p-1}((\tau_p+\varepsilon)U(e^{-\sigma}))+\lambda_n\sigma. \quad (4)$$

记 $\tilde\sigma=e^{-\sigma}$，$h(\tilde\sigma)=\exp_{p-1}((\tau_p+\varepsilon)U(\tilde\sigma))-\lambda_n\ln\tilde\sigma$，其中 $U(\tilde\sigma)=\tilde\sigma^{\rho(\tilde\sigma)}=e^{\rho(\tilde\sigma)\ln\tilde\sigma}$，则

$$h'(\tilde\sigma)=(\tau_p+\varepsilon)U'(\tilde\sigma)\prod_{n-1}^{p-1}\exp_n((\tau_p+\varepsilon)\cdot U(\tilde\sigma))-\lambda_n/\tilde\sigma.$$

令 $h'(\tilde\sigma)=0$，由引理2知

$$rU'(r)/U(r)=\rho_p(1+o(1))\ (r\to\infty)，$$

故当 $\tilde\sigma$ 充分大时，有

$$\prod_{n=0}^{p-1}\exp_n((\tau_p+\varepsilon)U(\tilde\sigma))=\lambda_n/(\rho_p(1+o(1)).$$

对上式两端连续取 $p-1$ 次对数，得

$$\ln_{p-1}((\tau_p+\varepsilon)U(\tilde\sigma))+\ln_{p-2}((\tau_p+\varepsilon)U(\tilde\sigma))+\cdots+\ln((\tau_p+\varepsilon)U(\tilde\sigma))+(\tau_p+\varepsilon)U(\tilde\sigma)=\ln_{p-1}\lambda_n/(\rho_p(1+o(1))).$$

又已知 $\tilde\sigma=e^{-\sigma}$，$U(\tilde\sigma)=\tilde\sigma^{\rho(\tilde\sigma)}=e^{\rho(\tilde\sigma)\ln\tilde\sigma}$，故

$$\lim_{\tilde\sigma\to+\infty}(\ln_{p-1}((\tau_p+\varepsilon)U(\tilde\sigma))+\ln_{p-2}((\tau_p+\varepsilon)U(\tilde\sigma))+\cdots+\ln((\tau_p+\varepsilon)U(\tilde\sigma))+(\tau_p+\varepsilon)U(\tilde\sigma))/((\tau_p+\varepsilon)U(\tilde\sigma))=1.$$

从而当 $\tilde\sigma$ 充分大时方程 $h'(\tilde\sigma)=(\rho_p(1+o(1))\prod_{n=0}^{p-1}\exp_n((\tau_p+\varepsilon)U(\tilde\sigma))-\lambda_n)/\tilde\sigma=0$ 的解为

$$\tilde\sigma_0=W(\ln_{p-1}(\lambda_n/(\rho_p(1+o(1)))))/((\tau_p+\varepsilon)(1+o(1)))).$$

由于 $U(t)$ 为增函数，故当 $\tilde\sigma>\tilde\sigma_0$ 时，$h'(\tilde\sigma)\geqslant0$，当 $\tilde\sigma<\tilde\sigma_0$ 时，$h'(\tilde\sigma)\leqslant0$，因此 $h(\tilde\sigma)$ 在 $\tilde\sigma_0$ 处取最小值

$$h_{\min}(\tilde\sigma)=\exp_{p-1}((\tau_p+\varepsilon)U(\tilde\sigma_0))-\lambda_n\ln\tilde\sigma_0.$$

由式(4)和上式知

$$\ln A_n^{*\,1/\lambda_n}\leqslant(\ln2)/\lambda_n+1/(\rho_p(1+o(1)))-\ln(W(\ln_{p-1}(\lambda_n/(\rho_p(1+o(1))))))/((\tau_p+\varepsilon)(1+o(1)))).$$

已知 $\lim_{n\to\infty}\ln_{p-1}\lambda_n=+\infty$，$\lim_{n\to\infty}W(t)=+\infty$，故当 n 充分大时，有

$$\ln A_n^{*\,1/\lambda_n}\leqslant(1+\alpha_n)\ln(1/(W(\ln_{p-1}(\lambda_n/(\rho_p(1+o(1)))))/((\tau_p+\varepsilon)(1+o(1))))))，$$

其中 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$，则由上式和引理2知

$$M_p=\lim_{n\to\infty}W^{\rho_p}(\ln_{p-1}\lambda_n)A_n^{*\,\rho_p/\lambda_n}\leqslant\tau_p+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性知 $M_p\leqslant\tau_p$.

接下来证 $\tau_p\leqslant M_p e^{\rho_p D}$. 若 $M_p=+\infty$，则显然成立. 若 $0\leqslant M_p<+\infty$，则由 M_p 的定义知，$\forall\varepsilon>0$，当 n 充分大时，有

$$\ln A_n^*<\lambda_n(\ln(M_p+\varepsilon))/\rho_p-\lambda_n\ln(W(\ln_{p-1}\lambda_n)).$$

任意取定 $\sigma<0$，对每一个充分大的正整数 n，有

$$\ln(A_n^* e^{-\sigma\lambda_n})\leqslant-\lambda_n\ln(W(\ln_{p-1}\lambda_n))-\sigma\lambda_n+\lambda_n(\ln(M_p+\varepsilon))/\rho_p.$$

因此对任意的正整数 n，有 $\ln(A_n^* e^{-\sigma\lambda_n})\leqslant\max_{x>0}g(x)$，其中

$$g(x)=-x\ln(W(\ln_{p-1}x))+a_\sigma x，$$
$$a_\sigma=(\ln(M_p+\varepsilon))/\rho_p-\sigma，$$

则 $\forall\sigma<0$，有 $\ln\mu(\sigma,F)\leqslant\max_{x>0}g(x)$.

下面求 $\max_{x>0}g(x)$.

$$g'(x)=-\ln(W(\ln_{p-1}x))-\ln_{p-1}(xW'(\ln_{p-1}x)/(W(\ln_{p-1}x)\prod_{j=1}^{p-1}\ln_j x))+a_\sigma.$$

由引理2知，有

$$tW'(t)/W(t)=1/(\rho_p+o(1))\ (t\to+\infty)，$$

又对充分大的 x 有

$$1/(\prod_{j=1}^{p-1}\ln_j x)>0，\lim_{x\to+\infty}1/(\prod_{j=1}^{p-1}\ln_j x)=0，$$

故若记 $g'(x)=-\ln(W(\ln_{p-1}x))-\beta+a_\sigma=0$，其中 $\beta>0$，$\lim_{x\to+\infty}\beta=0$，则方程的解为

$$x_0(\sigma)=\exp_{p-1}U(e^{a_\sigma-\beta}).$$

又当 $x\geqslant x_0(\sigma)$ 时，$g'(x)\leqslant0$；当 $x\leqslant x_0(\sigma)$ 时，$g'(x)\geqslant0$. 因此 $g(x)$ 在 $x=x_0(\sigma)$ 处取最大值且有

$$\ln\mu(\sigma,F)\leqslant\max_{x>0}g(x)=g(x_0(\sigma))=$$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\beta \exp_{p-1} U(e^{a\sigma-\beta}). \quad (5)$$

由引理 1 和式(5)有

$$(\ln_p M_u(\sigma,F))/U(e^{-\sigma}) \leqslant (\ln_p \mu(\sigma - D - \varepsilon, F))/U(e^{-\sigma}) \leqslant U(e^{(\ln(M_p+\varepsilon))/\rho_p-\sigma+D+\varepsilon-\beta})/U(e^{-\sigma}).$$

再由引理 2 和 ε 的任意性得

$$\tau_p = \limsup_{\sigma\to-\infty}(\ln_p M_u(\sigma,F))/U(e^{-\sigma}) \leqslant \limsup_{\sigma\to-\infty}(M_p+\varepsilon)e^{\rho D+\rho\varepsilon-\rho\beta}U(e^{-\sigma})/U(e^{-\sigma}) = e^{\rho D}M_p.$$

定理 4 若 L-S 变换(1)所表示的整函数 $F(s)$ 满足条件(2)和条件(3),具有型 τ_p,且记 $T_p = \limsup_{n\to\infty}(\ln_{p-1}\lambda_n)/U(A_n^{*\ -1/\lambda_n})$,则 $M_p = T_p$.

证 此定理证明类似于定理 2.

在一些特殊情况下,由定理 3 和定理 4 可类似得到如下推论.

推论 3 若 $D=0$,则在定理 3 和定理 4 的条件下有

$$\tau_p = \limsup_{\sigma\to-\infty}(\ln_p^+ M_u(\sigma,F))/U(e^{-\sigma}) = \limsup_{n\to\infty} W^{\rho_p}\cdot(\ln_{p-1}\lambda_n)A_n^{*\ \rho_p/\lambda_n} = \limsup_{n\to\infty}(\ln_{p-1}\lambda_n)/U(A_n^{*\ -1/\lambda_n}).$$

推论 4 若 $\rho(r) \equiv \rho_p$,则在定理 3 的条件下有

$$\limsup_{n\to\infty} A_n^{*\ \rho/\lambda_n}\ln_{p-1}\lambda_n \leqslant \tau_p = \limsup_{\sigma\to-\infty}(\ln_p^+ M_u(\sigma,F))/e^{-\sigma\rho_p} \leqslant e^{\rho D}\limsup_{n\to\infty} A_n^{*\ \rho/\lambda_n}\ln_{p-1}\lambda_n.$$

进一步,若 $D=0$,则有

$$\tau_p = \limsup_{\sigma\to-\infty}(\ln_p^+ M_u(\sigma,F))/e^{-\sigma\rho_p} = \limsup_{n\to\infty} A_n^{*\ \rho/\lambda_n}\ln_{p-1}\lambda_n.$$

注 5 从几个定理及推论可以看到,τ_p 在 $p=1$ 时的表示式和在 $p=2,3,\cdots$ 时的表示式相差常数 $e\rho$.

3 参考文献

[1] 余家荣.余家荣教授论文选[M].武汉:华中师范学院数学系编印,1983.

[2] 余家荣.Laplace-Stieltjes 变换所定义的整函数之 Borel 线[J].数学学报(中文版),1963,13(3):471-484.

[3] KONG Yinying,YANG Yan. On the growth properties of the Laplace-Stieltjes transform [J]. Complex Variables and Elliptic Equations,2014,59(4):553-563.

[4] 孔荫莹.平面上解析的无穷级 Laplace-Stieltjes 变换[J].数学学报(中文版),2013,56(1):53-60.

[5] 李云霞,邓冠铁.Laplace-Sieltjes 变换所定义的有限级整函数的级与型[J].北京师范大学学报(自然科学版),2009,45(3):244-246.

[6] 李云霞,邓冠铁.Laplace-Sieltjes 变换所表示的整函数的精确级的型[J].北京师范大学学报(自然科学版),2009,45(4):355-357.

[7] 刘素红,田宏根.Dirichlet 级数的增长性[J].纯粹数学与应用数学,2013,29(3):264-274.

[8] 尚丽娜,高宗升.Laplace-Stieltjes 变换所定义的无限级整函数的增长性[J].数学物理学报,2007,27A(6):1035-1043.

[9] 陆万春.Laplace-Seiltjes 变换所确定的整函数的$(p,q)(R)$级[J].萍乡高等专科学校学报,2011,28(3):1-4.

[10] 张洪申,孙道椿.右半平面上 Laplace-Stieltjes 变换的值分布[J].数学学报(中文版),2012,55(3):535-542.

[11] 王金莲,陆万春.全平面上收敛的零级 Laplace-Stieltjes 变换的增长性[J].兰州大学学报(自然科学版),2013,49(1):108-110.

[12] 陆万春,易才凤.Laplace-Stieltjes 变换所表示的解析函数的β-级[J].数学物理学报,2014,34A(5):1236-1244.

[13] 徐洪焱,刘三阳.无限级 Laplace-Stieltjes 变换所表示的整函数的增长性与逼近[J].数学物理学报,2020,40A(3):556-568.

[14] XU Hongyan,KONG Yinying. Entire functions represented by Laplace-Stieltjes transforms concerning the approximation and generalized order [J]. Acta Mathematica Scientia,2021,41B(2):646-656.

[15] 宁菊红,宋文佩,黄文平.广义 Laplace-Stieltjes 变换所表示的整函数的β级和广义型[J].江西师范大学学报(自然科学版),2020,44(6):590-593.

The Generalized Type of Laplace-Stieltjes Transform

ZHANG Shaoyin[1],NING Juhong[1*],HUANG Wenping[2]

(1. School of Mathematics and Statistics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China;
2. Basic Department,Army Infantry College,Nanchang Jiangxi 330103,China)

Abstract: In this paper,by introduce the concept of generalized type of finite and infinite order,the growth of Laplace-Stieltjes transform in the whole plane is investigated and the equivalence relation between the generalized type represented by the maximum modulus,maximum term and the generalized type represented by the coefficient,exponent is obtained,which generalize the related result.

Key words: Laplace-Stieltjes transform; maximum modulus; maximum term; finite order; infinite order; generalized type

(责任编辑:王金莲)

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net