第46卷 第4期 江西师范大学学报(自然科学版) Vol. 46 No. 4
2022年7月 Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science) Jul. 2022

谭晖,肖丽鹏. 关于一类高阶复微分方程解的增长性[J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2022,46(4):335-341.
TAN Hui,XIAO Lipeng. On the growth of solutions of a class of higher order complex differential equations[J]. Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science),2022,46(4):335-341.

文章编号: 1000-5862(2022)04-0335-07

关于一类高阶复微分方程解的增长性

谭 晖,肖丽鹏*

(江西师范大学数学与统计学院,江西 南昌 330022)

摘要: 该文研究了一类高阶线性微分方程 $f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_1f'+A_0f=F(z)$ 解的增长性,其中 A_0,A_1,$\cdots$,A_{k-1},$F(z)$ 是整函数,并且 A_0、A_1 是另一个2阶线性方程的非平凡解. 推广了龙见仁等得到的结果.

关键词: 高阶线性微分方程;整函数;增长级;超级

中图分类号: O 174.52 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2022.04.02

0 引言与结果

在本文中,假定读者熟悉亚纯函数的值分布理论和标准记号[1-3]. 对于一个复平面上的亚纯函数 $f(z)$,用 $\sigma(f)$、$\mu(f)$ 分别表示 $f(z)$ 的级和下级,$\lambda(f)$、$\bar{\lambda}(f)$ 分别表示 $f(z)$ 的零点收敛指数和不计重数零点收敛指数,$\sigma_2(f)$ 表示 $f(z)$ 的超级[4],定义为

$$\sigma_2(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}(\log\log T(r,f))/\log r.$$

注1 若 $f(z)$ 是整函数,则它的级和下级分别定义为

$$\sigma(f)=\limsup_{r\to\infty}(\log\log M(r,f))/\log r=\limsup_{r\to\infty}(\log T(r,f))/\log r,$$

$$\mu(f)=\liminf_{r\to\infty}(\log\log M(r,f))/\log r=\liminf_{r\to\infty}(\log T(r,f))/\log r.$$

回顾亚纯函数 $f(z)$ 零点序列聚值线的定义,可在文献[5]中找到.

定义1[5] 设 $g(z)$ 是复平面上的亚纯函数,$\arg z=\theta\in\mathbf{R}$ 是一条从原点出发的射线,对每一个 $\varepsilon>0$,记 $\lambda_\theta=\lim_{\varepsilon\to0^+}\lambda_{\theta,\varepsilon}(g)$ 表示 $g(z)$ 在射线 $\arg z=\theta$ 上零点序列的收敛指数,这里

$$\lambda_{\theta,\varepsilon}(g)=\limsup_{r\to\infty}(\log n_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,0,g))/\log r,$$

其中 $n_{\alpha,\beta}(r,0,g)$ 表示 $g(z)$ 在区域 $\{z:\alpha<\arg z<\beta\}\cap\{z:|z|<r\}$ 上的零点个数(计重数).

若 $\lambda_\theta(g)=\sigma(g)$,则称射线 $\arg z=\theta$ 是 $g(z)$ 零点序列的聚值线.

注2 根据定义1和下面的引理3可知,对于2阶线性微分方程

$$\omega''+P(z)\omega=0 \tag{1}$$

(其中 $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0,a_n\neq0$)的任一个非平凡解 $f(z)$,它的零点序列的聚值线条数不超过 $n+2$ 且是集合 $\{\theta_j:0\leqslant j\leqslant n+1\}$ 的子集,其中 $\theta_j=(2j\pi-\arg a_n)/(n+2)$.

定义2[6] 设 $\omega(z)$ 是方程(1)的非平凡解,用 $p(\omega)$ 记射线 $\arg z=\theta_j$ 不是 $\omega(z)$ 零点序列的聚值线总条数,其中 $\theta_j=(2j\pi-\arg a_n)/(n+2)$,$j=0,1,\cdots,n+1$.

注3 根据定义2和下面的引理3可知,$p(\omega)$ 一定是偶数.

众所周知,2阶线性微分方程

$$f''+A(z)f'+B(z)f=0 \tag{2}$$

的所有解都是整函数,其中 $A(z)$、$B(z)(\not\equiv0)$ 是有限级整函数. 一方面,若 $B(z)$ 是超越的,f_1、f_2 是方程(2)的2个线性无关解,则 f_1、f_2 至少有1个是无穷级. 另一方面,对于形如(2)的方程可能会存在有限级非零整函数解. 如方程 $f''+e^{-z}f'-(e^{-z}+1)f=0$

收稿日期: 2021-10-20

基金项目: 国家自然科学基金(11661043)资助项目.

通信作者: 肖丽鹏(1979—),女,江西吉安人,副教授,博士,主要从事复分析研究. E-mail:2992507211@qq.com

有一个解 $f(z)=e^z$,可知 $\sigma(f)=1$.

一个自然的问题是:若方程(2)的所有非零解都是无穷级,$A(z)$ 和 $B(z)$ 需要满足什么条件?有许多学者研究了这一个问题,得到了重要的结果.如 G. G. Gundersen[7] 和 S. Hellerstein 等[8] 证明了:若 $\sigma(A)<\sigma(B)$,或者 $A(z)$ 是多项式且 $B(z)$ 是超越的,或者 $\sigma(B)<\sigma(A)\leqslant 1/2$,则方程(2)的所有非零解都是无穷级.文献[9]给出了定理 A 和定理 B.

定理 A[9] 设 $A(z)$、$B(z)$ 是方程(2)的 2 个线性无关解,若 $A(z)$ 的零点序列的聚值线条数小于 $n+2$,则方程(3)的任意解 $f(z)(\neq 0)$ 具有无穷级.

定理 B[9] 设 $A(z)$、$B(z)$ 分别是方程 $\omega''+Q_1(z)\omega=0$ 和 $\omega''+Q_2(z)\omega=0$ 的非平凡解,其中 $Q_1(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0(a_n\neq 0)$,$Q_2(z)=b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_0(b_m\neq 0)$,若满足下列任一个条件:

(i) $m>n$;

(ii) $m<n$;

(iii) $m=n$,$\arg a_n=\arg b_m$,$A(z)$ 的零点序列的聚值线条数小于 $n+2$;

(iv) $m=n$,$a_n=cb_m$,其中 $0<c<1$,

则方程(2)的任意解 $f(z)(\neq 0)$ 具有无穷级.

自然地会问:对于高阶线性微分方程,当方程系数满足什么条件时,也能够保证方程的任意解 $f(z)(\neq 0)$ 具有无穷级?对于这个问题,陈宗煊等[10] 证明了定理 C.

定理 C[10] 设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 是整函数,满足

(i) $\sigma(A_j)<\sigma(A_0)<\infty(j=1,2,\cdots,k-1)$

或者

(ii) $A_0(z)$ 是有限级超越整函数,$A_1,A_2,\cdots,A_{k-1}$ 是多项式,

则线性微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_1f'+A_0f=0 \quad (3)$$

的所有非零解具有无穷级.

受以上结果的启发,本文考虑在高阶线性微分方程(3)系数满足一定条件时解的增长性问题,同时还考虑方程(3)对应的非齐次方程,得到了如下结论.

定理 1 设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 是整函数,若满足下列条件:

(i) A_0、A_1 是方程(1)的 2 个线性无关解,A_1 的零点序列的聚值线条数小于 $n+2$;

(ii) $\max\{\sigma(A_2),\sigma(A_3),\cdots,\sigma(A_{k-1})\}<(n+2)/2$,则微分方程(3)的任意解 $f(z)(\neq 0)$ 具有无穷级且 $\sigma_2(f)=(n+2)/2$.

定理 2 若 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 同定理 1 的假设,$F(z)(\neq 0)$ 是有限级整函数,则

(i) 微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_1f'+A_0f=F(z) \quad (4)$$

至多有 1 个可能的有限级例外解 f_0,其他所有解 f 满足

$$\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty;$$

(ii) 若存在(i)中的 1 个有限级例外解 f_0,则 f_0 满足

$$\sigma(f_0)\leqslant\max\{\sigma(F),\lambda(f_0),(n+2)/2\}.$$

定理 3 设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 是整函数,满足 $\max\{\sigma(A_2),\sigma(A_3),\cdots,\sigma(A_{k-1})\}<(n+2)/2$,$A_1$、$A_0$ 分别是方程 $\omega''+Q_1(z)\omega=0$ 和 $\omega''+Q_2(z)\omega=0$ 的非平凡解,其中 $Q_1(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0(a_n\neq 0)$,$Q_2(z)=b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_0(b_m\neq 0)$,若满足下列任一个条件:

(i) $m>n$;

(ii) $m=n$,$\arg a_n=\arg b_m$,A_1 的零点序列的聚值线条数小于 $n+2$;

(iii) $m=n$,$a_n=cb_m$,其中 $0<c<1$,

则微分方程(3)的任意解 $f(z)(\neq 0)$ 具有无穷级.进一步,当条件(ii)成立时,有 $\sigma_2(f)=(n+2)/2$.

定理 4 若 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 同定理 3 的假设,$F(z)(\neq 0)$ 是有限级整函数,且满足在定理 3 中任一个条件,则

(i) 微分方程(4)至多有 1 个可能的有限级例外解 f_0,其他所有解 f 满足

$$\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty;$$

(ii) 若存在(i)中的 1 个有限级例外解 f_0,则 f_0 满足

$$\sigma(f_0)\leqslant\max\{\sigma(F),\lambda(f_0),(m+2)/2\}.$$

定理 5 设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 是整函数,A_1、A_0 同定理 3 的假设且满足 $m<n$.若存在一个整数 $l\in\{2,3,\cdots,k-1\}$,有 $\max\{\sigma(A_j):j\neq l,2\leqslant j\leqslant k-1\}<\mu(A_l)$ 且 $\sigma(A_l)<(m+2)/2$,则微分方程(3)的任意解 $f(z)(\neq 0)$ 具有无穷级.

定理 6 若 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 同定理 5 的假设,$F(z)(\neq 0)$ 是有限级整函数,则

(i) 微分方程(4)至多有 1 个可能的有限级例外解 f_0,其他所有解 f 满足

$$\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f) = \infty.$$

(ii) 若存在(i) 中的 1 个有限级例外解 f_0，则 f_0 满足

$$\sigma(f_0) \leqslant \max\{\sigma(F), \lambda(f_0), (n+2)/2\}.$$

1　证明所需引理

引理 1[11]　设 f 是超越亚纯函数且 $\sigma(f) = \sigma < \infty$，$\Gamma = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), \cdots, (k_m, j_m)\}$ 是由不同整数对组成的有限集，满足 $k_i > j_i \geqslant 0$，$i = 1, 2, \cdots, m$，又设 $\varepsilon > 0$ 是给定的常数，则

(i) 存在 1 个零测度集 $E_1 \subset [0, 2\pi)$，使得若 $\psi_0 \in [0, 2\pi) \setminus E_1$，则存在常数 $R_0 = R(\psi_0) > 1$，对于满足 $\arg z = \psi_0$ 且 $|z| \geqslant R_0$ 的所有 z 及所有 $(k, j) \in \Gamma$，有

$$|f^{(k)}(z)/f^{(j)}(z)| \leqslant |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}; \tag{5}$$

(ii) 存在 1 个对数测度为有限的集合 $E_2 \subset (1, \infty)$，使得对于满足 $|z| \notin E_2 \cup [0, 1]$ 的所有 z 及所有 $(k, j) \in \Gamma$，有式(5) 成立；

(iii) 存在 1 个线性测度有限集合 $E_3 \subset [0, \infty)$，使得对于满足 $|z| \notin E_3$ 的所有 z 及所有 $(k, j) \in \Gamma$，有

$$|f^{(k)}(z)/f^{(j)}(z)| \leqslant |z|^{(k-j)(\sigma+\varepsilon)}.$$

引理 2[11]　设 f 是超越亚纯函数，$\alpha > 1$ 为一个给定的常数，k、j 为整数且满足 $k > j \geqslant 0$.

(i) 存在 1 个对数测度有限的集合 $E_1 \subset [1, \infty)$ 和 1 个常数 $K > 0$，使得对于所有满足 $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$ 的所有 z，有

$$|f^{(k)}(z)/f^{(j)}(z)| \leqslant K(T(\alpha r, f)(\log^{\alpha} r)\log T(\alpha r, f)/r)^{k-j}; \tag{6}$$

(ii) 存在零测度集 $E_2 \subset [0, 2\pi)$，使得若 $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_2$，则存在常数 $R = R(\theta) > 0$，对于满足 $\arg z = \theta$ 及 $|z| \geqslant R$ 的所有 z，有式(6) 成立.

在证明结果的过程中，2 阶线性微分方程(1) 解的渐进性质有着重要的作用. 下面介绍一些记号，令 $r > 0$，$\alpha < \beta$ 且有 $\beta - \alpha < 2\pi$，记

$$S(\alpha, \beta) = \{z: \alpha < \arg z < \beta\},$$

$$S(\alpha, \beta, r) = \{z: \alpha < \arg z < \beta\} \cap \{z: |z| < r\}.$$

令 $\bar{F}$ 表示集合 F 的闭包，$A(z)$ 是整函数，并且满足 $\sigma(A(z)) \in (0, \infty)$，为简洁明了，记作 $\sigma = \sigma(A)$，$S = S(\alpha, \beta)$. 若 $\forall \theta \in (\alpha, \beta)$，有

$$\sigma = \lim_{r\to\infty}(\log\log|A(re^{i\theta})|)/\log r,$$

则称 $A(z)$ 在 $\bar{S}$ 上呈指数爆破. 若 $\forall \theta \in (\alpha, \beta)$，有

$$\sigma = \lim_{r\to\infty}(\log\log|A(re^{i\theta})|^{-1})/\log r,$$

则称 $A(z)$ 在 $\bar{S}$ 上呈指数衰减到 0.

引理 3[6]　若 $A(z)$ 是微分方程(1) 的非平凡解，其中 $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}\cdots + a_0$，$a_n \neq 0$，令 $\theta_j = (2j\pi - \arg a_n)/(n+2)$ 和 $S_j = S(\theta_j, \theta_{j+1})$，其中 $j = 0, 1, 2, \cdots, n+1$，$\theta_{n+2} = \theta_0 + 2\pi$，则 $A(z)$ 有下列性质：

(i) 在每个角域 S_j 上，A 呈指数爆破或者呈指数衰减到 0；

(ii) 若对于某个 j，A 在角域 S_j 上呈指数衰减到 0，则 A 在角域 S_{j-1} 和 S_{j+1} 上一定呈指数爆破；然而，A 可能在许多相邻的角域上呈指数爆破；

(iii) 若 A 在角域 S_j 呈指数衰减到 0，则 A 在角域 $S_{j-1} \cup \bar{S_j} \cup S_{j+1}$ 的任意闭子扇形上至多有有限个零点；

(iv) 若 A 在角域 S_{j-1} 和 S_j 上呈指数爆破，则对每一个 $\varepsilon > 0$，A 在集合 $\bar{S}(\theta_j - \varepsilon, \theta_j + \varepsilon)$ 上有无穷多个零点. 进一步，当 $r \to \infty$ 时，有

$$n(\bar{S}(\theta_j - \varepsilon, \theta_j + \varepsilon, r), 0, A) = 2(1 + o(1)) \cdot \sqrt{|a_n|}\, r^{(n+2)/2}/(\pi(n+2)),$$

其中 $n(\bar{S}(\theta_j - \varepsilon, \theta_j + \varepsilon, r), 0, A)$ 表示 A 在区域 $\bar{S}(\theta_j - \varepsilon, \theta_j + \varepsilon, r)$ 上计重数的零点个数.

引理 4[6]　设 $A(z)$ 是微分方程(1) 的非平凡解，其中 $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0\ (a_n \neq 0)$，则当 $r \to \infty$ 时，有

$$\log M(r, A) = 2(1 + o(1))\sqrt{|a_n|}\, r^{(n+2)/2}/(n+2).$$

引理 5[10]　设 $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}, F(z)\ (\neq 0)$ 是整函数，f 满足微分方程

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \cdots + A_1 f' + A_0 f = F(z)$$

且

$$\max\{\sigma(F), \sigma(A_j): j = 0, 1, \cdots, k-1\} < \sigma(f) = \sigma\ (0 < \sigma \leqslant \infty),$$

则 $\bar{\lambda}(f) = \lambda(f) = \sigma(f)$.

引理 6[7]　设 $f(z)$ 是整函数，若 $|f^{(k)}(z)|$ 在射线 $\arg z = \theta$ 上无界，则存在一个无穷点列 $z_n = r_n e^{i\theta}\ (n = 1, 2, \cdots)$，其中 $r_n \to \infty$，满足 $f^{(k)}(z_n) \to \infty$ 和

$|f^{(j)}(z_n)/f^{(k)}(z_n)| \leqslant |z_n|^{k-j}(1+o(1))(j=0,1,\cdots,k-1)$.

引理 7[12] 设 $f(z)$ 是整函数且 $\sigma(f)=\sigma<\infty$,假设存在线测度为 0 的子集 $E\subset[0,2\pi)$,满足对于任意射线 $\arg z=\theta_0\in[0,2\pi)\backslash E$,有 $|f(re^{i\theta})|\leqslant Mr^k$,其中 $M=M(\theta_0)>0$ 是常数,$k(>0)$ 是与 θ_0 无关的常数,则 $f(z)$ 是多项式且 $\deg f\leqslant k$.

利用 Wiman-Valiron 理论,不难得出引理 8.

引理 8 设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 是有限级整函数,若 f 是微分方程(3)的解,则有

$$\sigma_2(f)\leqslant \max\{\sigma(A_i):i=0,1,\cdots,k-1\}.$$

2 定理的证明

定理 1 的证明 首先,证明方程(3)没有非零多项式解. 假设 f 是方程(3)的非零多项式解,若 f 是非零常数,则由方程(3)和定理 1 的条件可得矛盾. 因此,可令 $\deg f=m\geqslant 1$,有

$$|f^{(j)}(z)/f(z)|=o(1),j=1,2,\cdots,k. \quad (7)$$

由 $\rho=\max\{\sigma(A_2),\sigma(A_3),\cdots,\sigma(A_{k-1})\}<(n+2)/2$ 和级的定义知,$\forall\varepsilon>0$,当 r 充分大时,有

$$|A_j(z)|\leqslant \exp(r^{\rho+\varepsilon}),j=2,3,\cdots,k-1. \quad (8)$$

根据引理 3 和定理 1 的条件,可设 $\theta_j=(2j\pi-\arg a_n)/(n+2)$ 和 $S_j=\{z:\theta_j<\arg z<\theta_{j+1}\}$,其中 $j=0,1,2,\cdots,n+1,\theta_{n+2}=\theta_0+2\pi$.

由亚纯函数零点序列的聚值线的定义可知 $p(A_1)\geqslant 2$. 又由引理 3 可知,在上述 $n+2$ 个角域中,至少存在某角域使得 $A_1(z)$ 在该角域内呈指数衰减到 0. 不失一般性,可设该角域为 $S_{j_0}=\{z:\theta_{j_0}<\arg z<\theta_{j_0+1}\}(0\leqslant j_0\leqslant n+1)$,则 $\forall\theta\in(\theta_{j_0},\theta_{j_0+1})$,有

$$\lim_{r\to\infty}(\log\log(1/|A_1(re^{i\theta})|))/\log r=(n+2)/2. \quad (9)$$

断言,$A_1(z)$、$A_0(z)$ 在同一角域上都呈指数衰减到 0 是不可能的. 不失一般性,假设 $A_1(z)$、$A_0(z)$ 在角域 S_{j_0} 上都呈指数衰减到 0,令 $h=A_1/A_0$,根据在文献[6]中的引理 3 可知,当 r 充分大时,有

$$N(r,1/(h-b))=(1+o(1))T(r,h)=2(1+o(1))\sqrt{|a_n|}r^{\alpha}/(\pi\alpha),$$

其中 $\alpha=(n+2)/2$,b 是可能除去有限个例外值的任意复数. 又令 $\omega=A_1-bA_0$,易知 ω 是方程(1)的非零解. 又根据在文献[6]中的定理 5 可知,当 r 充分大时,有

$$N(r,1/(h-b))=N(r,1/\omega)=(1+o(1))\cdot(2\alpha-p(\omega))\sqrt{|a_n|}r^{\alpha}/(\pi\alpha^2). \quad (10)$$

由式(9)和式(10)知 $p(\omega)=0$. 由引理 3 可知,ω 在每个角域 $S_j(j=0,1,\cdots,n+1)$ 上呈指数爆破. 这同假设 ω 在角域 S_{j_0} 上呈指数衰减到 0 矛盾. 因此,A_0 在角域 S_{j_0} 上呈指数爆破,即 $\forall\theta\in(\theta_{j_0},\theta_{j_0+1})$,有

$$\lim_{r\to\infty}(\log\log|A_0(re^{i\theta})|)/\log r=(n+2)/2. \quad (11)$$

可取 $z_t=r_te^{i\theta'}$,其中 $\theta'\in(\theta_{j_0},\theta_{j_0+1})$,使式(7)~(9)和式(11)同时成立. 由方程(4)可知,当 $r_t\to\infty$ 时,有

$$\exp(r_t^{(n+2)/2-\varepsilon})\leqslant|A_0(r_te^{i\theta'})|\leqslant|f^{(k)}(r_te^{i\theta'})/f(r_te^{i\theta'})|+|A_{k-1}(r_te^{i\theta'})||f^{(k-1)}(r_te^{i\theta'})/f(r_te^{i\theta'})|+\cdots+|A_1(r_te^{i\theta'})||f'(r_te^{i\theta'})/f(r_te^{i\theta'})|\leqslant o(1)+(k-2)\exp(r_t^{\rho+\varepsilon})o(1)=o(\exp(r_t^{\rho+\varepsilon})). \quad (12)$$

其中 $\varepsilon>0$ 是任意给定的常数. 取 $0<2\varepsilon<(n+2)/2-\rho$,则式(12)是矛盾的.

下面证明 $\sigma_2(f)=(n+2)/2$. 由引理 8 可知 $\sigma_2(f)\leqslant(n+2)/2$. 根据在引理 2 中的(ii)可知,存在 1 个零测度集 $E_2\subset[0,2\pi)$ 和一个常数 $B>0$,满足:若 $\psi\in[0,2\pi)\backslash E_2$,则存在常数 $R=R(\psi)>0$,对于满足 $\arg z=\psi$ 及 $|z|=r\geqslant R$ 的所有 z,有

$$|f^{(j)}(z)/f(z)|\leqslant B(T(2r,f))^{k+1},j=1,2,\cdots,k. \quad (13)$$

因此,存在一点列 $z_n=r_ne^{i\theta}$,其中当 $n\to\infty$,有 $r_n\to\infty$,$\theta\in(\theta_{j_0},\theta_{j_0+1})\backslash E_2$,使得式(9)、式(11)、式(13)同时成立. 又由方程(3)可知,对充分大的 n,有

$$\exp(r_n^{(n+2)/2-\varepsilon})\leqslant|A_0(r_ne^{i\theta})|\leqslant|f^{(k)}(r_ne^{i\theta})/f(r_ne^{i\theta})|+|A_{k-1}(r_ne^{i\theta})||f^{(k-1)}(r_ne^{i\theta})/f(r_ne^{i\theta})|+\cdots+|A_1(r_ne^{i\theta})||f'(r_ne^{i\theta})/f(r_ne^{i\theta})|\leqslant B(T(2r_n,f))^{k+1}(1+(k-2)\exp(r_n^{\rho+\varepsilon})+o(1))\leqslant C(T(2r_n,f))^{k+1}\exp(r_n^{\rho+\varepsilon}),$$

其中 $C>0$ 是常数,$\varepsilon>0$ 是任意给定的常数. 取 $0<2\varepsilon<(n+2)/2-\rho$,根据超级的定义可知 $\sigma_2(f)\geqslant(n+2)/2$.

综上,证得 $\sigma_2(f)=(n+2)/2$. 根据超级和级的定义可知 $\sigma(f)=\infty$.

定理 2 的证明 (i)假设 f_0 是方程(4)的解,满足 $\sigma(f_0)<\infty$. 若方程(4)还有另一个有限级解

$f_1(\neq f_0)$,则$\sigma(f_1-f_0)<\infty$.又f_1-f_0是方程(4)所对应的齐次方程(3)的解,这与方程(3)的所有解$f(\neq 0)$都是无穷级矛盾,即证得方程(4)至多有1个可能的有限级例外解f_0,其他所有解f满足$\sigma(f)=\infty$.根据定理2的条件和引理5,有

$$\bar{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f).$$

(ii)假设f_0是方程(4)的有限级例外解,则f_0满足

$$f_0^{(k)}+A_{k-1}f_0^{(k-1)}+\cdots+A_1f_0'+A_0f_0=F(z).\quad(14)$$

将式(14)改写为

$$1/f_0=(f_0^{(k)}/f_0+A_{k-1}f_0^{(k-1)}/f_0+\cdots+A_1f_0'/f_0+A_0)/F.\quad(15)$$

由式(15)可知,若z_0为f_0的大于k阶的α阶零点,则z_0必为F的$\alpha-k$阶零点,从而有

$$n(r,1/f_0)\leqslant k\bar{n}(r,1/f_0)+n(r,1/F),$$

$$N(r,1/f_0)\leqslant k\bar{N}(r,1/f_0)+N(r,1/F).\quad(16)$$

又由定理2的条件可知$\max\{\sigma(A_i):i=0,1,\cdots,k-1\}=(n+2)/2$.根据级的定义知,$\forall\varepsilon>0$,当$r$充分大时,有

$$T(r,A_i)\leqslant r^{(n+2)/2+\varepsilon}(i=0,1,\cdots,k-1).\quad(17)$$

又根据对数导数引理,最多除去1个有限线测度的r值集E外,有

$$m(r,f_0^{(j)}/f_0)=O(\log r)(j=1,2,\cdots,k),$$

$$m(r,1/f_0)\leqslant m(r,1/F)+\sum_{j=0}^{k-1}m(r,A_j)+O(\log r)\quad(r\notin E).\quad(18)$$

由式(16)~(18)可得

$$T(r,f_0)=T(r,1/f_0)+O(1)=N(r,1/f_0)+m(r,1/f_0)+O(1)\leqslant k\bar{N}(r,1/f_0)+T(r,F)+\sum_{j=0}^{k-1}T(r,A_j)+O(\log r)\leqslant k\bar{N}(r,1/f_0)+T(r,F)+kr^{(n+2)/2+\varepsilon}+O(\log r).\quad(19)$$

根据级的定义和式(19),有$\sigma(f_0)\leqslant\max\{\sigma(F),\lambda(f_0),(n+2)/2\}$.

定理3的证明　假设$f(\neq 0)$是方程(3)的有限级解.

情形1　条件(i)成立.有$\sigma(A_j)<\sigma(A_0)=(m+2)/2(j=1,2,\cdots,k-1)$.根据定理C可知$\sigma(f)=\infty$.

情形2　条件(ii)成立.由条件(ii)和注2可知A_1、A_0零点序列的聚值线集合不同.则存在一个角域$S(\alpha,\beta)=\{z:\alpha<\arg z<\beta\}$,使得$\forall\theta\in(\alpha,\beta)$有式(9)和式(11)成立.类似于定理1的证明,可证得$\sigma(f)=\infty$且$\sigma_2(f)=(n+2)/2$.

情形3　条件(iii)成立.假定f是超越的,由在引理1中的(ii)可知,存在一个有限对数测度集$E_2\subset(1,\infty)$,使得对于满足$|z|\notin E_2\cup[0,1]$的所有z,有

$$|f^{(i)}(z)/f(z)|\leqslant r^{k\sigma},i=1,2,\cdots,k.\quad(20)$$

根据定理3的条件和引理4可知,当$r\to\infty$时,有

$$\log M(r,A_1)=2(1+o(1))\sqrt{|a_n|}r^{\alpha}/\alpha,$$

$$\log M(r,A_0)=2(1+o(1))\sqrt{|b_m|}r^{\alpha}/\alpha,\quad(21)$$

其中$\alpha=(n+2)/2$.由$\rho=\max\{\sigma(A_2),\sigma(A_3),\cdots,\sigma(A_{k-1})\}<(n+2)/2$知,$\forall\varepsilon>0$,取$0<2\varepsilon<(n+2)/2-\rho$,当$r$充分大时,有式(8)成立.取一个满足$|z_l|=r_l\in(1,\infty)\setminus E_2$的无穷点列$\{z_l\}$,使得

$$|A_0(z_l)|=M(r_l,A_0).\quad(22)$$

由式(3)、式(8),式(20)~(22)知,当$l\to\infty$时,

$$(1+o(1))\sqrt{|b_m|}r_l^{\alpha}/\alpha=\log M(r_l,A_0)=\log|A_0(z_l)|\leqslant\log(|f^{(k)}(z_l)/f(z_l)|+|A_{k-1}(z_l)|\cdot|f^{(k-1)}(z_l)/f(z_l)|+\cdots+|A_1(z_l)||f'(z_l)/f(z_l)|)\leqslant\log(|z_l|^{k\sigma(f)}+|A_{k-1}(z_l)||z_l|^{k\sigma(f)}+\cdots+|A_1(z_l)|\cdot|z_l|^{k\sigma(f)})\leqslant k^2\sigma(f)\log r_l+(k-2)r_l^{\rho+\varepsilon}+\log M(r_l,A_1)+\log k=k^2\sigma(f)\log r_l+(k-2)r_l^{\rho+\varepsilon}+(1+o(1))\sqrt{|a_n|}r_l^{\alpha}/\alpha+\log k=(1+o(1))\sqrt{|a_n|}\cdot r_l^{\alpha}(1+\alpha(k^2\sigma(f)\log r_l+(k-2)r_l^{\rho+\varepsilon}+\log k)/(\sqrt{|a_n|}\cdot r_l^{\alpha}(1+o(1)))))/\alpha=(1+o(1))\sqrt{|a_n|}r_l^{\alpha}/\alpha.$$

因此,可推得$|b_m|\leqslant|a_n|$.这与在条件(iii)中的$|b_m|>|a_n|$矛盾,所以$\sigma(f)=\infty$.

下面证明方程(3)没有非零多项式解.假设f是方程(3)的非零多项式解,若f是非零常数,则由方程(3)和定理3的条件可得矛盾.因此,可令$\deg f=t\geqslant 1$,则有式(7)成立.由式(3)、(7)、(8)、(21)、(22)知,当$l\to\infty$时,

$$(1+o(1))\sqrt{|b_m|}r_l^{\alpha}/\alpha=\log M(r_l,A_0)=\log|A_0(z_l)|\leqslant\log(|f^{(k)}(z_l)/f(z_l)|+|A_{k-1}(z_l)|\cdot|f^{(k-1)}(z_l)/f(z_l)|+\cdots+|A_1(z_l)||f'(z_l)/f(z_l)|)\leqslant(k-2)r_l^{\rho+\varepsilon}+\log M(r_l,A_1)+\log k=(1+o(1))\cdot\sqrt{|a_n|}r_l^{\alpha}(1+\alpha((k-2)r_l^{\rho+\varepsilon}+\log k)/(\sqrt{|a_n|}r_l^{\alpha}(1+$$

$o(1))))/\alpha=(1+o(1))\sqrt{|a_n|}r_l^{\alpha}/\alpha$.

由此,也可推得$|b_m|\leqslant|a_n|$.这与在条件(iii)中$|b_m|>|a_n|$矛盾,所以方程(3)没有非零多项式解.

综上,可证得$\sigma(f)=\infty$.

定理4的证明 使用与定理2相同的证法.

定理5的证明 假设$f(\not\equiv 0)$是方程(3)的有限级解.比较方程(3)两边的增长级,可知$\sigma(f)=\sigma\geqslant\sigma(A_1)=(n+2)/2$.令

$$F_{A_1}=\{\theta\in[0,2\pi):\theta=(2p\pi-\arg a_n)/(n+2)\},p=0,1,\cdots,n+1,$$

$$F_{A_0}=\{\theta\in[0,2\pi):\theta=(2q\pi-\arg b_m)/(m+2)\},q=0,1,\cdots,m+1.$$

由引理1的(i)可知,存在一个零测度集$E_3\subset[0,2\pi)$,满足:若$\psi_0\in[0,2\pi)\backslash E_3$,则存在常数$R_0=R(\psi_0)>1$,对于满足$\arg z=\psi_0$及$|z|=r\geqslant R_0$的所有$z$,有

$$|f^{(j_1)}(z)/f^{(j_2)}(z)|\leqslant r^{k\sigma},0\leqslant j_2<j_1\leqslant k. \quad (23)$$

设$F=E_3\cup F_{A_1}\cup F_{A_0}$,$\forall\theta\in[0,2\pi)\backslash F$,$A_1$、$A_0$在射线$\arg z=\theta$上可能有4种增长类型:

(a) $A_1(re^{i\theta})$满足

$$\lim_{r\to\infty}(\log\log|1/A_1(re^{i\theta})|)/\log r=(n+2)/2, \quad (24)$$

$A_0(re^{i\theta})$满足

$$\lim_{r\to\infty}(\log\log|A_0(re^{i\theta})|)/\log r=(m+2)/2. \quad (25)$$

(b) $A_1(re^{i\theta})$满足式(25),$A_0(re^{i\theta})$满足

$$\lim_{r\to\infty}(\log\log|1/A_0(re^{i\theta})|)/\log r=(m+2)/2. \quad (26)$$

(c) $A_1(re^{i\theta})$满足

$$\lim_{r\to\infty}(\log\log|A_1(re^{i\theta})|)/\log r=(n+2)/2. \quad (27)$$

$A_0(re^{i\theta})$满足式(25).

(d) $A_1(re^{i\theta})$满足式(27),$A_0(re^{i\theta})$满足式(26).

不失一般性,假设$l=k-1$,则有

$$\rho=\max\{\sigma(A_j):2\leqslant j\leqslant k-2\}<\mu(A_{k-1})\leqslant\sigma(A_{k-1})<(m+2)/2.$$

根据级的定义知,$\forall\varepsilon>0$,当r充分大时,有

$$|A_j(z)|\leqslant\exp(r^{\rho+\varepsilon}),j=2,3,\cdots,k-2. \quad (28)$$

(i) 若$A_1(re^{i\theta})$、$A_0(re^{i\theta})$在射线$\arg z=\theta$上满足类型(a)时,取点列$z_l=r_le^{i\theta}$($l\to\infty$,有$r_l\to\infty$),其中$\theta\in[0,2\pi)\backslash F$,使式(23)~(25)、(28)同时成立.由方程(3)知,对充分大的l,有

$$\exp(r_l^{(m+2)/2-\varepsilon})\leqslant|A_0(r_le^{i\theta})|\leqslant|f^{(k)}(r_le^{i\theta})/f(r_le^{i\theta})|+|A_{k-1}(r_le^{i\theta})||f^{(k-1)}(r_le^{i\theta})/f(r_le^{i\theta})|+\cdots+|A_1(r_le^{i\theta})||f'(r_le^{i\theta})/f(r_le^{i\theta})|\leqslant r_l^{k\sigma}+(k-2)\exp(r_l^{\rho+\varepsilon})r_l^{k\sigma}+\exp(-r_l^{(n+2)/2-\varepsilon})r_l^{k\sigma}\leqslant r_l^{k\sigma}(1+(k-2)\exp(r_l^{\rho+\varepsilon})+o(1))\leqslant Mr_l^{k\sigma}\exp(r_l^{\rho+\varepsilon}), \quad (29)$$

其中$M>0$是常数,$\varepsilon>0$是任意给定的常数.取$0<2\varepsilon<(m+2)/2-\rho$,则式(29)矛盾.即证得$\sigma(f)=\infty$.

(ii) 若$A_1(re^{i\theta})$、$A_0(re^{i\theta})$在射线$\arg z=\theta$上满足类型(b)时,可假设$|f^{(k-1)}(z)|$在射线$\arg z=\theta$上无界,由引理6知,存在一个无穷点列$z_t=r_te^{i\theta}$,当$t\to\infty$时,有$f^{(k-1)}(z_t)\to\infty$和

$$|f^{(i)}(z_t)/f^{(k-1)}(z_t)|\leqslant|z_t|^{k-1}(1+o(1))\ (i=0,1,\cdots,k-2). \quad (30)$$

由式(3)、(23)、(28)、(30),当$t\to\infty$时,有

$$\exp(r_t^{\mu(A_{k-1})-\varepsilon})\leqslant|A_{k-1}(z_t)|\leqslant|f^{(k)}(z_t)/f^{(k-1)}(z_t)|+|A_{k-2}(z_t)||f^{(k-2)}(z_t)/f^{(k-1)}(z_t)|+\cdots+|A_1(z_t)||f'(z_t)/f^{(k-1)}(z_t)|+|A_0(z_t)||f(z_t)/f^{(k-1)}(z_t)|\leqslant r_t^{k\sigma}+(k-3)\exp(r_t^{\rho+\varepsilon})r_t^{k-1}(1+o(1))+(\exp(-r_t^{(n+2)/2-\varepsilon})+\exp(-r_t^{(m+2)/2-\varepsilon}))r_t^{k-1}(1+o(1))\leqslant Mr_t^{k\sigma+k-1}\exp(r_t^{\rho+\varepsilon}), \quad (31)$$

其中$M>0$是常数,取$0<2\varepsilon<\mu(A_{k-1})-\rho$,可知式(31)矛盾.所以,$|f^{(k-1)}(z)|$在射线$\arg z=\theta$上有界.因此,在射线$\arg z=\theta$上有$|f(z)|\leqslant C_1\cdot|z|^{k-1}$,其中$C_1>0$是常数.

(iii) 若$A_1(re^{i\theta})$、$A_0(re^{i\theta})$在射线$\arg z=\theta$上满足类型(c)时,可先假设$|f'(z)|$在射线$\arg z=\theta$上无界,由引理6可知,存在一个无穷点列$z_t=r_te^{i\theta}$,当$t\to\infty$时,有$f'(z_t)\to\infty$和

$$|f(z_t)/f'(z_t)|\leqslant r_t(1+o(1)). \quad (32)$$

根据式(3)、(23)、(28)、(32),当$t\to\infty$时,有

$$\exp(r_t^{(n+2)/2-\varepsilon})\leqslant|A_1(z_t)|\leqslant|f^{(k)}(z_t)/f'(z_t)|+|A_{k-1}(z_t)||f^{(k-1)}(z_t)/f'(z_t)|+\cdots+|A_2(z_t)|\cdot|f''(z_t)/f'(z_t)|+|A_0(z_t)||f(z_t)/f'(z_t)|\leqslant r_t^{k\sigma}+(k-2)\exp(r_t^{\rho+\varepsilon})r_t^{k\sigma}+\exp(r_t^{(m+2)/2+\varepsilon})r_t(1+o(1))\leqslant Cr_t^{k\sigma+1}\exp(r_t^{(m+2)/2+\varepsilon}), \quad (33)$$

其中$C>0$是常数,取$0<4\varepsilon<n-m$,则式(33)矛盾.所以,$|f'(z)|$在射线$\arg z=\theta$上有界.因此,在

射线 $\arg z = \theta$ 上有 $|f(z)| \leqslant C_2|z|$,其中 $C_2 > 0$ 是常数.

(iv) 若 $A_1(re^{i\theta})$、$A_0(re^{i\theta})$ 在射线 $\arg z = \theta$ 上满足类型(d)时,类似(iii)的方法,同样可证得在射线 $\arg z = \theta$ 上有 $|f(z)| \leqslant C_3|z|$,其中 $C_3 > 0$ 是常数.

由(ii)～(iv)知,在任意射线 $\theta \in [0,2\pi) \backslash F$ 上,有 $|f(z)| \leqslant B|z|^{k-1}$,其中 $B > 0$ 是常数. 由引理 7 知,$f(z)$ 至多为 $k-1$ 次的多项式. 这与 $\sigma(f) \geqslant (n+2)/2$ 矛盾,即证得 $\sigma(f) = \infty$. 综上,可证得 $\sigma(f) = \infty$.

定理 6 的证明　使用与定理 2 相同的证法.

3 参考文献

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社,1982.

[2] LAINE I. Nevanlinna theory and complex differential equations[M]. Berlin: Walter de Gruyter,1993.

[3] HAYMAN W K. Meromorphic function[M]. Oxford: Clarendon Press,1964.

[4] 仪洪勋,杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社,1995.

[5] LONG Jianren,WU Pengcheng,WU Xiubi. On the zero distribution of solutions of second order linear differential equations in the complex domain[J]. New Zealand Journal of Mathematics,2012,42: 9-16.

[6] GUNDERSEN G G. On the real zeros of solutions of $f'' + A(z)f = 0$ where $A(z)$ is entire[J]. Annals Academiae Scientiarum Fennicae: Mathematica,1986,11: 275-294.

[7] GUNDERSEN G G. Finite order solutions of second order linear differential equations[J]. Transactions of the American Mathematical Society,1988,305(1): 415-429.

[8] HELLERSTEIN S,MILES J,ROSSI J. On the growth of solutions of $f'' + gf' + hf = 0$[J]. Transactions of the American Mathematical Society,1991,324(2): 693-706.

[9] LONG Jianren,WU Tingmi,WU Xiubi. Growth of solutions of complex differential equations with solutions of another equation as coefficients[J]. Computational Methods and Function Theory,2019,19(1): 3-16.

[10] 高仕安,陈宗煊,陈特为. 线性微分方程的复振荡理论[M]. 武汉: 华中理工大学出版社,1998.

[11] GUNDERSEN G G. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates[J]. Journal of the London Mathematical Society,1988,37(1): 88-104.

[12] CHEN Zongxuan,SHON K H. On the growth of solutions of a class of higher order differential equations[J]. Acta Mathematica Scientia,2004,24B(1): 52-60.

On the Growth of Solutions of a Class of Higher Order Complex Differential Equations

TAN Hui,XIAO Lipeng*

(School of Mathematics and Statistics,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

Abstract: In this paper,the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations $f^{(k)} + A_{k-1} \cdot f^{k-1} + \cdots + A_1 f' + A_0 f = F(z)$ is studied,where $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}, F(z)$ are entire functions,in addition,A_0 and A_1 are non-trivial solutions of another second-order linear equation. Previous results which are obtained by Long Jianren,Wu Tingmi and Wu Xiubi are promoted.

Key words: higher order linear differential equation; entire function; the growth order; hyper-order

(责任编辑: 王金莲)