李冉冉,王红玉,开依沙尔·热合曼. 求解对流扩散方程的4阶紧致差分格式[J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2022,46(5):517-522.

LI Ranran,WANG Hongyu,KAYSAR Rahman. The fourth-order compact finite difference scheme for the convection diffusion equation[J]. Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science),2022,46(5):517-522.

文章编号:1000-5862(2022)05-0517-06

求解对流扩散方程的4阶紧致差分格式

李冉冉,王红玉,开依沙尔·热合曼*

(新疆大学数学与系统科学学院,新疆 乌鲁木齐 830046)

摘要: 该文提出了在周期和 Dirichlet 边界条件下的1维对流扩散方程的紧致差分格式.在这2种边界条件下对空间变量使用4阶紧致差分格式,对时间变量利用3次 Hermite 插值公式构造空间和时间同时具有4阶精度的数值格式,并证明了格式的绝对稳定性,最后通过对2种边界条件下的算例进行数值实验和比较,验证了格式的精确性和可靠性.

关键词: 对流扩散方程;紧致差分格式;Hermite 插值;Dirichlet 边界条件

中图分类号: O 211.67 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2022.05.12

0 引言

对流扩散方程是在偏微分方程中一个重要的分支,被用于描述排水膜中的传热、溶解物质的分散、液体溶质的扩散等现象,被广泛应用于环境科学,流体力学等众多领域中.本文研究1维对流扩散方程的初边值问题:

$$\begin{cases} u_t + \beta u_x = \alpha u_{xx}, a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(x,0) = f(x), a \leqslant x \leqslant b, \\ u(a,t) = g_1(t), u(b,t) = g_2(t), 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{1}$$

其中α为扩散系数,β为对流系数,f、g_1、g_2均为已知充分光滑的函数,u为待求未知量.

近年来,求解该问题的数值方法有有限差分法[1-10]、有限元法[11]和有限体积法[12]等.由于有限差分法十分简便且有效,因此在求解该问题时得到很多研究者的青睐.文献[3]用梯形方法构造该问题的时间2阶、空间4阶精度的差分格式.文献[4]对该问题应用时间3阶、空间2阶精度的差分格式,该格式在数值模拟上取得较好的结果,但在空间方向上的精度有待提高.针对这种情况,学者们对空间变量提出高阶紧致差分格式,文献[5]给出关于1阶、2阶导数4阶紧致离散格式并应用于两点边值问题的数值计算.文献[6-7]将文献[5]中4阶紧致格式应用于 Kuramoto-Sivashinsky 和耦合 Burgers 方程组的数值模拟中.文献[8]对定常对流扩散反应方程提出4阶精度的差分格式,并通过结合 Richardson 技术达到提高计算精度的目的.文献[9]通过结合紧致差分格式和4阶边值法构造出时间空间同时具有4阶精度的格式.文献[10]利用3次 Hermite 插值公式来求解双曲型电信方程,在时间方向上取得4阶精度.通过以上分析,本文将结合文献[5]和文献[10]的方法,对带有周期和 Dirichlet 边界条件的对流扩散方程构造时间空间同时具有4阶精度的绝对稳定的差分格式.

本文给出了空间离散格式以及描述了时间离散算法,并对格式的稳定性给出了证明和满足2种边界条件下的算例的数值验证.

收稿日期:2022-05-12

基金项目:国家自然科学基金(11461069)和新疆大学博士启动基金(BS150204)资助项目.

通信作者:开依沙尔·热合曼(1978—),男,新疆库车人,副教授,博士,主要从事微分方程数值计算方面的研究.E-mail:kaysar2014@sina.com

1 空间离散

1.1 在周期边界条件下对流扩散方程的差分格式

考虑具有周期边界的对流扩散方程:

$$\begin{cases} u_t + \beta u_x = \alpha u_{xx}, 0 \leqslant x \leqslant L, 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(x,0) = f(x), 0 \leqslant x \leqslant L, \\ u(x+L,t) = u(x,t), 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{2}$$

为了逼近在对流扩散方程中的空间导数,将计算域 $\Omega \times [0,T] = \{(x,t) \mid 0 \leqslant x \leqslant L, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 划分为由点集 $\{(x_j,t_i)\}$ 描述的均匀网格,记 $x_j = j\Delta x, j = 0,1,\cdots,N, \Delta x = L/N, t_i = i\Delta t, i = 0,1,\cdots,M, \Delta t = T/M$,称 Δx 和 Δt 分别为空间步长和时间步长.

本文的空间变量的 1 阶导数项和 2 阶导数项使用 4 阶紧致差分公式[5]

$$u'_{j-1} + 4u'_j + u'_{j+1} = 3(u_{j+1} - u_{j-1})/\Delta x, \ j = 1, 2, \cdots, N \tag{3}$$

来近似,其中 u'_j 表示 $u(x)$ 在 j 处 1 阶导数的近似值.

式(3)写成矩阵形式:

$$L_1 U' = M_1 U,$$

其中

$$L_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{N\times N},$$

$$M_1 = \frac{3}{\Delta x}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{N\times N},$$

$$U = (u_1, u_2, \cdots, u_N)^{\mathrm{T}}, U' = (u'_1, u'_2, \cdots, u'_N)^{\mathrm{T}}.$$

则空间变量的 1 阶导数可以表示为

$$U' = L_1^{-1} M_1 U. \tag{4}$$

若 u''_j 表示 $u(x)$ 在 j 处的 2 阶导数的近似值,则有

$$u''_{j-1} + 10u''_j + u''_{j+1} = 12(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1})/\Delta x^2, \ j = 1,2,\cdots,N. \tag{5}$$

式(5)写成矩阵形式:

$$L_2 U'' = M_2 U,$$

其中

$$L_2 = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}_{N\times N},$$

$$M_2 = \frac{12}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{N\times N},$$

$$U'' = (u''_1, u''_2, \cdots, u''_N)^{\mathrm{T}}.$$

则空间变量的 2 阶导数可以表示为

$$U'' = L_2^{-1} M_2 U. \tag{6}$$

将式(4)和(6)代入方程(2)得到常微分方程

$$\mathrm{d}U/\mathrm{d}t = A_1 U, \tag{7}$$

其中 $A_1 = \alpha L_2^{-1} M_2 - \beta L_1^{-1} M_1$.

1.2 在 Dirichlet 边界条件下对流扩散方程的差分格式

为了逼近在对流扩散方程中的空间导数,将计算域 $\Omega \times [0,T] = \{(x,t) \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 划分为由点集 $\{(x_i,t_j)\}$ 描述的均匀网格,记 $x_j = a + (j-1)\Delta x, j = 1,2,\cdots,N, \Delta x = (b-a)/(N-1), t_i = i\Delta t, i = 0,1,\cdots,M, \Delta t = T/M$.

本文的空间变量的 1 阶和 2 阶导数同样用上述 4 阶紧致格式[5]来近似,空间变量的 1 阶导数项用

$$\begin{aligned} &4u'_2 + u'_3 = (-11u_1/12 - 4u_2 + 6u_3 - 4u_4/3 + u_5/4)/\Delta x, \ j = 1, \\ &u'_{j-1} + 4u'_j + u'_{j+1} = 3(u_{j+1} - u_{j-1})/\Delta x, \ j = 2, 3, \cdots, N-1, \\ &u'_{N-2} + 4u'_{N-1} = (-u_{N-4}/4 + 4u_{N-3}/3 - 6u_{N-2} + 4u_{N-1} + 11u_N/12)/\Delta x, \ j = N \end{aligned} \tag{8}$$

来逼近. 式(8)写成矩阵形式:

$$L_x U' = M_x U + b_1,$$

其中

$$L_x = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{(N-2)\times(N-2)},$$

$$M_x = \frac{3}{\Delta x}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 2 & -\frac{4}{9} & \cdots & 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{12} & \frac{4}{9} & -2 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}_{(N-2)\times(N-2)},$$

$$b_1 = 11(-u_1, 0, \cdots, 0, u_N)^{\mathrm{T}}/(12\Delta x),$$

$$U = (u_2, u_3, \cdots, u_{N-1})^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{U}' = (u_2', u_3', \cdots, u_{N-1}')^{\mathrm{T}}.$$

则空间变量的 1 阶导数可以表示为

$$\boldsymbol{U}' = \boldsymbol{L}_x^{-1}(\boldsymbol{M}_x\boldsymbol{U} + \boldsymbol{b}_1). \tag{9}$$

空间变量的 2 阶导数用

$$14u_2'' - 5u_3'' + 4u_4'' - u_5'' = 12(u_1 - 2u_2 + u_3)/\Delta x^2, \quad j = 1,$$

$$u_{j-1}'' + 10u_j'' + u_{j+1}'' = 12(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1})/\Delta x^2, \quad j = 2, 3, \cdots, N-1,$$

$$-u_{N-4}'' + 4u_{N-3}'' - 5u_{N-2}'' + 14u_{N-1}'' = 12(u_{N-2} - 2u_{N-1} + u_N)/\Delta x^2, \quad j = N \tag{10}$$

来逼近. 式(10) 写成矩阵形式:

$$\boldsymbol{L}_{xx}\boldsymbol{U}'' = \boldsymbol{M}_{xx}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{b}_2,$$

其中

$$\boldsymbol{L}_{xx} = \begin{pmatrix} 14 & -5 & 4 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 4 & -5 & 14 \end{pmatrix}_{(N-2)\times(N-2)},$$

$$\boldsymbol{M}_{xx} = \frac{12}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{(N-2)\times(N-2)},$$

$$\boldsymbol{b}_2 = 12(u_1, 0, \cdots, 0, u_N)^{\mathrm{T}}/\Delta x^2,$$

$$\boldsymbol{U}'' = (u_2'', u_3'', \cdots, u_{N-1}'')^{\mathrm{T}}.$$

则空间变量的 2 阶导数可以表示为

$$\boldsymbol{U}'' = \boldsymbol{L}_{xx}^{-1}(\boldsymbol{M}_{xx}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{b}_2). \tag{11}$$

将式(9) 和(11) 代入方程(1) 得常微分方程

$$\mathrm{d}\boldsymbol{U}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{U} + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{b}_1, \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{A}_2 = \alpha\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}\boldsymbol{M}_{xx} - \beta\boldsymbol{L}_x^{-1}\boldsymbol{M}_x$，$\boldsymbol{B}_1 = \alpha\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{C}_1 = \beta\boldsymbol{L}_x^{-1}\boldsymbol{b}_1$.

2　3 次 Hermite 插值法

3 次 Hermite 插值多项式 $p(x)$[10] 可以写成

$$p(x) = f(x_0)h_0(x) + f(x_1)h_1(x) + f'(x_0)\cdot H_0(x) + f'(x_1)H_1(x), \tag{13}$$

其中

$$h_0(x) = (1 + 2(x - x_0)/(x_1 - x_0))((x - x_1)/(x_0 - x_1))^2,$$

$$h_1(x) = (1 + 2(x - x_0)/(x_0 - x_1))((x - x_0)/(x_1 - x_0))^2,$$

$$H_0(x) = (x - x_0)((x - x_1)/(x_0 - x_1))^2,$$

$$H_1(x) = (x - x_1)((x - x_0)/(x_1 - x_0))^2.$$

在如下定理中，给出了 3 次 Hermite 插值多项式(13) 的误差.

定理 1[13]　设有 2 个不同的点 x_0、x_1，且 $f \in C^4[x_0, x_1]$. 若 $p(x)$ 是 3 次 Hermite 插值多项式，则在区间 $[x_0, x_1]$ 中的每个 x 都对应于 $[x_0, x_1]$ 中的 1 个点 ξ，有

$$f(x) - p(x) = f^{(4)}(\xi)(x - x_0)^2(x - x_1)^2/24. \tag{14}$$

根据等式(14) 和定理 1 可以得到积分公式

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = (x_1 - x_0)(f(x_0) + f(x_1))/2 + (x_1 - x_0)^2(f'(x_0) - f'(x_1))/12 + f^{(4)}(\xi)(x_1 - x_0)^5/24. \tag{15}$$

在周期边界下，常微分方程(7) 应用 3 次 Hermite 插值(15)，有

$$\boldsymbol{U}^{n+1} - \boldsymbol{U}^n = \int_n^{n+1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{U}\mathrm{d}t = \Delta t(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{U}^n + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{U}^{n+1})/2 + (\Delta t)^2(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{U}'^n - \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{U}'^{n+1})/12 = \Delta t(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{U}^n + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{U}^{n+1})/2 + (\Delta t)^2(\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{U}^n - \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{U}^{n+1}))/12 = \Delta t\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{U}^n + \boldsymbol{U}^{n+1})/2 = (\Delta t)^2\boldsymbol{A}_1^2(\boldsymbol{U}^n - \boldsymbol{U}^{n+1})/12.$$

因此，式(2) 的差分格式为

$$\boldsymbol{U}^{n+1} = (\boldsymbol{I} - \Delta t\boldsymbol{A}_1/2 + (\Delta t)^2\boldsymbol{A}_1^2/12)^{-1}(\boldsymbol{I} + \Delta t\boldsymbol{A}_1/2 + (\Delta t)^2\boldsymbol{A}_1^2/12)\boldsymbol{U}^n. \tag{16}$$

同理，常微分方程(12) 应用 3 次 Hermite 插值(15)，则在 Dirichlet 边界下的对流扩散方程(1) 的差分格式为

$$\boldsymbol{U}^{n+1} = (\boldsymbol{I} - \Delta t\boldsymbol{A}_2/2 + (\Delta t)^2\boldsymbol{A}_2^2/12)^{-1}((\boldsymbol{I} + \Delta t\boldsymbol{A}_2/2 + (\Delta t)^2\boldsymbol{A}_2^2/12)\boldsymbol{U}^n + (\Delta t\boldsymbol{B}_1/2 + (\Delta t)^2\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_1/12)\boldsymbol{b}_2^n + (\Delta t\boldsymbol{B}_1/2 - (\Delta t)^2\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_1/12)\boldsymbol{b}_2^{n+1} - (\Delta t\boldsymbol{C}_1/2 + (\Delta t)^2\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{C}_1/12)\boldsymbol{b}_1^n + (-\Delta t\boldsymbol{C}_1/2 + (\Delta t)^2\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{C}_1/12)\cdot\boldsymbol{b}_1^{n+1} + (\Delta t)^2\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{b}_2'^n - \boldsymbol{b}_2'^{n+1})/12 + (\Delta t)^2\boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{b}_1'^{n+1} - \boldsymbol{b}_1'^n)/12), \tag{17}$$

其中 $\boldsymbol{b}_1' = 11(-\partial u_1/\partial t, 0, \cdots, 0, \partial u_{N-2}/\partial t)^{\mathrm{T}}/(12\Delta x)$，$\boldsymbol{b}_2' = 12(\partial u_1/\partial t, 0, \cdots, 0, \partial u_{N-2}/\partial t)^{\mathrm{T}}/(\Delta x)^2$.

3　稳定性分析

引理 1[14]　设 $\boldsymbol{G} = (g_{ij})_{n\times n}$ 为严格对角占优的，则

1) $\boldsymbol{G}$ 是可逆的;

2) 若 G 的所有主对角线项都为正,则 G 的所有特征值都有正实部;

3) 若 G 是 Hermite 矩阵,且 G 的所有主对角线项都为正,则 G 的所有特征值都为正实数.

引理 2 [15] 若 z 的实部是非正的,则

$$|(12+6z+z^2)/(12-6z+z^2)| \leqslant 1.$$

定理 2 本文差分格式(16)和(17)的截断误差为 $o(\Delta t^4+\Delta x^4)$ 且无条件稳定.

证 已知 $\boldsymbol{A}_1=\alpha \boldsymbol{L}_2^{-1}\boldsymbol{M}_2-\beta \boldsymbol{L}_1^{-1}\boldsymbol{M}_1$,假设 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,n+1)$ 为 $\boldsymbol{A}_1$ 的特征值,λ_l、λ_m、λ_{ll}、λ_{mm} 分别为 $\boldsymbol{L}_1$、$\boldsymbol{M}_1$、$\boldsymbol{L}_2$、$\boldsymbol{M}_2$ 的特征值,则 $\boldsymbol{A}_1$ 的特征值一定具有形式

$$\lambda_j=\alpha\lambda_{ll}/\lambda_{mm}-\beta\lambda_l/\lambda_m.$$

由于矩阵 $\boldsymbol{L}_1$、$\boldsymbol{L}_2$ 为严格对角占优且为 Hermite 矩阵,故由引理 1 可知 λ_l、λ_{ll} 是正实数. 又由盖尔圆定理知 $\lambda_{mm}<0$,虽然 λ_m 的特征值有正有负,但它们都是数值较小且趋向于 0 的数,故当 $\alpha>0$ 时,有 $\lambda_j<0$. 设 $\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{I}-\Delta t\boldsymbol{A}_1/2+(\Delta t)^2\boldsymbol{A}_1^2/12)^{-1}(\boldsymbol{I}+\Delta t\boldsymbol{A}_1/2+(\Delta t)^2\boldsymbol{A}_1^2/12)$,则可以得到 $\boldsymbol{E}$ 的特征值

$$(\lambda_{\boldsymbol{E}})_j=(12+6\Delta t\lambda_j+(\Delta t)^2\lambda_j^2)/(12-6\Delta t\lambda_j+(\Delta t)^2\lambda_j^2),j=1,2,\cdots,n+1.$$

因为 $\lambda_j<0$,所以由引理 1 和引理 2 知,$|(12+6\Delta t\lambda_j+(\Delta t)^2\lambda_j^2)/(12-6\Delta t\lambda_j+(\Delta t)^2\lambda_j^2)|\leqslant 1$,即

$$|(\lambda_{\boldsymbol{E}})_j|\leqslant 1(j=1,2,\cdots,n+1).$$

在本文格式(17)的齐次情况下,结构与格式(16)是一致的,因此,格式(16)、(17)都是无条件稳定的. 因为紧致离散格式(4)、(6)、(9)、(11)在空间方向上为 4 阶,且 3 次 Hermite 插值公式在时间方向上为 4 阶,因此差分格式(16)、(17)截断误差为 $o((\Delta t)^4+(\Delta x)^4)$.

4 数值实验

为了研究本文格式的可靠性,对满足 2 种边界条件下的算例进行数值计算,并比较了本文格式的 L_2 范数误差及空间时间的收敛阶. 表 1 ~ 表 4 给出了:本文格式(16)、(17)的时间变量均为 Crank-Nicolson,空间变量分别为中心差分格式[1] $o((\Delta x)^2+(\Delta t)^2)$、4 阶差分格式[2](HOC) $o((\Delta x)^4+(\Delta t)^2)$. 其中 L_2 范数误差和收敛阶的定义分别为

$$L_2=\sqrt{\sum_{k=1}^{K}(U_k-u_k)^2/K},$$

$$r=\lg(\|u-U_{\Delta x(\Delta t)}\|/\|u-U_{\Delta x(\Delta t)/2}\|/\lg 2,$$

其中 U_k、u_k 分别表示点 x_k 处的数值解和准确解.

例 1 考虑具有周期边界的对流扩散方程[16]:

$$\begin{cases}u_t+\beta u_x=\alpha u_{xx},(x,t)\in[0,L]\times[0,T],\\u(x,0)=\sin x,\end{cases}$$

其准确解为 $u(x,t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(x-\beta t)$,其中 $\alpha=\beta=1,L=2\pi$.

表 1 和表 2 针对周期边界的对流扩散方程,当 $T=1$、$\Delta t=0.002$ 和 $T=1$、$\Delta x=1/60$ 时,给出了在不同 Δx 和 Δt 的 L_2 范数误差和收敛阶的比较. 由表 1 和表 2 可以看出:当空间变量离散分别为 2 阶中心差分格式、HOC,时间变量离散为 Crank-Nicolson 时,本文格式(16)具有更小的误差,且在时间和空间方向上都达到了 4 阶精度,这与理论结果相符合.

例 2 考虑具有 Dirichlet 边界的对流扩散方程[17]:

$$\begin{cases}u_t+\beta u_x=\alpha u_{xx},(x,t)\in[a,b]\times[0,T],\\u(x,0)=\varepsilon\mathrm{e}^{-cx},\\u(0,t)=\varepsilon\mathrm{e}^{\gamma t-ca},\\u(1,t)=\varepsilon\mathrm{e}^{\gamma t-cb},\end{cases}$$

其准确解为 $u(x,t)=\varepsilon\mathrm{e}^{\gamma t-cx}$,$c=(-\beta+\sqrt{\beta^2+4\alpha\gamma})/(2\alpha)$,其中 $\alpha=\beta=1,a=0,b=1,\varepsilon=1,\gamma=2$.

表 1 例 1 中当 $T=1$、$\Delta t=0.002$、不同 Δx 时的 L_2 范数误差和收敛阶比较

Δx	中心差分格式		HOC		本文格式(16)	
	L_2 范数误差	r	L_2 范数误差	r	L_2 范数误差	r
$\pi/5$	2.2397×10^{-2}		8.0154×10^{-4}		4.2580×10^{-4}	
$\pi/10$	5.1672×10^{-3}	2.1159	3.9742×10^{-5}	4.3340	2.1272×10^{-5}	4.3231
$\pi/20$	1.2424×10^{-3}	2.0562	2.0394×10^{-6}	4.2844	1.2047×10^{-6}	4.1422
$\pi/40$	3.0465×10^{-4}	2.0279	1.5159×10^{-7}	3.7499	7.1876×10^{-8}	4.0670

表 2　例 1 中当 $T=1$、$\Delta x=1/60$、不同 Δt 时的 L_2 误差和收敛阶比较

Δt	中心差分格式		HOC		本文格式(16)	
	L_2 范数误差	r	L_2 范数误差	r	L_2 范数误差	r
1/5	2.4592×10^{-3}		2.4636×10^{-3}		3.2660×10^{-6}	
1/10	6.1020×10^{-4}	2.0108	6.1438×10^{-4}	2.0035	2.0396×10^{-7}	4.0012
1/20	1.4976×10^{-4}	2.0267	1.5350×10^{-4}	2.0009	1.2628×10^{-8}	4.0135
1/40	3.6432×10^{-5}	2.0394	3.8369×10^{-5}	2.0002	6.5193×10^{-10}	4.2758

表 3 和表 4 针对 Dirichlet 边界的对流扩散方程，当 $T=1$、$\Delta t=(\Delta x)^2$ 和 $T=1$、$\Delta x=0.0125$ 时，给出了在不同 Δx 和 Δt 时的 L_2 范数误差和收敛阶的比较. 由表 3 和表 4 可以看出：当空间变量离散分别为 2 阶中心差分格式、HOC，时间变量离散为 Crank-Nicolson 时，本文格式(17)具有更小的误差，且在时间和空间方向上都达到了 4 阶精度，这与理论结果相符合.

表 3　例 2 中当 $T=1$、$\Delta t=(\Delta x)^2$、不同 Δx 时的 L_2 范数误差和收敛阶比较

Δx	中心差分格式		HOC		本文格式(17)	
	L_2 范数误差	r	L_2 范数误差	r	L_2 范数误差	r
1/12	7.0551×10^{-4}		1.4572×10^{-5}		1.3695×10^{-7}	
1/24	1.6246×10^{-4}	2.1186	7.8474×10^{-7}	4.2149	8.3495×10^{-9}	4.0359
1/48	3.9187×10^{-5}	2.0517	4.5558×10^{-8}	4.1064	6.3646×10^{-10}	3.7135
1/96	9.6344×10^{-6}	2.0241	2.7442×10^{-9}	4.0532	4.1459×10^{-11}	3.9403

表 4　例 2 中当 $T=1$、$\Delta x=0.0125$、不同 Δt 时的 L_2 误差和收敛阶比较

Δt	中心差分格式		HOC		本文格式(17)	
	L_2 范数误差	r	L_2 范数误差	r	L_2 范数误差	r
1/5	9.1504×10^{-3}		9.1353×10^{-3}		2.3068×10^{-5}	
1/10	2.3215×10^{-3}	1.9788	2.3073×10^{-3}	1.9853	1.5168×10^{-6}	3.9268
1/20	5.9230×10^{-4}	1.9707	5.7831×10^{-4}	1.9963	9.6219×10^{-8}	3.9786
1/40	1.5860×10^{-4}	1.9009	1.4467×10^{-4}	1.9991	6.1394×10^{-9}	3.9701

5　结论

本文在周期和 Dirichlet 边界条件下对空间变量的离散达到了 4 阶精度，并结合 3 次 Hermite 插值法提出了数值求解 1 维对流扩散方程在空间和时间上都具有 4 阶精度且绝对稳定的差分格式. 采用本文的方法计算了 2 个数值算例，从表 1 和表 3 可知：本文的格式在空间上达到了 4 阶的精度，与传统的中心差分格式和 HOC 格式相比，体现了本文格式的有效性；从表 2 和表 4 可知：本文的格式在时间上也达到了 4 阶的精度，与 Crank-Nicolson 相比，本文的格式更精确. 另外，该格式也可以通过利用局部 1 维化方法推广到 2 维和 3 维对流扩散方程问题的数值计算中.

6　参考文献

[1] 陆金甫，关治. 偏微分方程数值解法[M]. 2 版. 北京：清华大学出版社，2004：97-104.

[2] SPOTZ W F. High-order compact finite difference schemes for computational mechanics[D]. Austin：The University of Texas at Austin，1995.

[3] 开依沙尔·热合曼，阿孜古丽·牙生，祖丽皮耶·如孜. 求解一维对流扩散方程的高精度紧致差分格式[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版)，2014，32(1)：135-138.

[4] 开依沙尔·热合曼，努尔买买提·黑力力. 求解对流扩散方程的 Padé 逼近格式[J]. 江西师范大学学报(自然科学版)，2014，38(3)：261-264.

[5] ZHAO Jichao. Highly accurate compact mixed methods for

two point boundary value problems [J]. Applied Mathematics and Computation,2007,188(2):1402-1418.
[6] BHATT H P,CHOWDHURY A. A high-order implicit-explicit Runge-Kutta type scheme for the numerical solution of the Kuramoto-Sivashinsky equation [J]. International Journal of Computer Mathematics,2021,98(6):1254-1273.
[7] BHATT H P,KHALIQ A Q M. Fourth-order compact schemes for the numerical simulation of coupled Burgers′ equation [J]. Computer Physics Communications,2016,200:117-138.
[8] 祁应楠,武莉莉. 一维定常对流扩散反应方程的高精度紧致差分格式 [J]. 华中师范大学学报(自然科学版),2017,51(1):1-6.
[9] DEHGHAN M,MOHEBBI A. High-order compact boundary value method for the solution of unsteady convection-diffusion problems [J]. Mathematics and Computers in Simulation,2008,79(3):683-699.
[10] LUO Xuqiong,DU Qikui. An unconditionally stable fourth-order method for telegraph equation based on Hermite interpolation [J]. Applied Mathematics and Computation,2013,219(15):8237-8246.
[11] LIN Runchang,YE Xiu,ZHANG Shangyou,et al. A weak Galerkin finite element method for singularly perturbed convection-diffusion: reaction problems [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis,2018,56(3):1482-1497.
[12] CANCES C,CHAINAIS-HILLAIRET C,KRELL S. Numerical analysis of a nonlinear free-energy diminishing discrete duality finite volume scheme for convection diffusion equations [J]. Computational Methods in Applied Mathematics,2018,18(3):407-432.
[13] KRESS R. Numerical analysis [M]. New York: Springer Verlag,1998.
[14] WILKINSON J H. The algebraic eigenvalue problem [M]. New York: Oxford University Press,1965.
[15] DING Hengfei,ZHANG Yuxin. A new difference scheme with high accuracy and absolute stability for solving convection-diffusion equations [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2009,230(2):600-606.
[16] CHENG Yingda,SHU C W. Superconvergence of local discontinuous Galerkin methods for one-dimensional convection-diffusion equations [J]. Computers & Structures,2009,87(11/12):630-641.
[17] MOHEBBI A,DEHGHAN M. High-order compact solution of the one-dimensional heat and advection-diffusion equations [J]. Applied Mathematical Modelling,2010,34(10):3071-3084.

The Fourth-Order Compact Finite Difference Scheme for the Convection Diffusion Equation

LI Ranran,WANG Hongyu,KAYSAR Rahman*
(College of Mathematics and System Science,Xinjiang University,Urumqi Xinjiang 830046,China)

Abstract: In this paper,a compact difference scheme for the one-dimensional convection diffusion equation under periodic and Dirichlet boundary conditions is proposed. The fourth-order compact difference scheme is used for the spatial variables under these two boundary conditions,and the numerical scheme with both spatial and temporal fourth-order accuracy is constructed using the cubic Hermite interpolation formula for the temporal variables. Finally,the accuracy and reliability of the scheme is verified by numerical experiments and comparisons of numerical examples under two boundary conditions.

Key words: convection diffusion equation; high-order compact finite difference; Hermite formula; Dirichlet boundary conditions

(责任编辑:曾剑锋)