

温利民,冯会珍,李俊雪,等.基于混合指数型损失厌恶函数的投资组合模型[J].江西师范大学学报(自然科学版),2023,47(1):1-7.

WEN Limin, FENG Huizhen, LI Junxue, et al. The portfolio model based on mixed exponential loss aversion function [J]. Journal of Jiangxi Normal University( Natural Science) 2023 47(1):1-7.

文章编号:1000-5862(2023)01-0001-07

# 基于混合指数型损失厌恶函数的投资组合模型

温利民<sup>1,2</sup>,冯会珍<sup>1</sup>,李俊雪<sup>1</sup>,周景萃<sup>1</sup>

(1.江西师范大学数学与统计学院,江西 南昌 330022;2.江西师范大学管理科学与工程研究中心,江西 南昌 330022)

摘要:结合前景理论的核心思想,该文从期望效用最大化的角度研究不同风险资产的配置问题.在线性损失厌恶函数的基础上,该文结合指数效用函数的性质,提出了一个新的效用函数——混合指数型损失厌恶函数,建立了混合指数型损失厌恶投资组合(MELA)模型,并对中国股票市场数据进行实证研究,得出 MELA 模型优于均值-方差模型的结论.

关键词:损失厌恶;效用函数;投资组合

中图分类号:F840.48;F224 文献标志码:A DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2023.01.01

## 0 引言

一直以来,最优投资策略都是国内外学者广泛关注的问题.从1937年J. M. Keynes<sup>[1]</sup>提出的选美理论到1944年J. von Neumann等<sup>[2]</sup>提出的期望效用理论,到1952年H. Markowitz<sup>[3]</sup>提出的现代投资组合理论,再到1959年M. F. M. Osborne<sup>[4]</sup>提出的随机游走理论和1965年E. F. Fama<sup>[5]</sup>提出的有效市场假说,这些成为传统的最优投资策略研究的理论基石.

期望效用理论描述了理性投资者在风险条件下的决策行为.然而,在现实中期望效用理论并不能完全解释投资者的决策行为,因为投资者的情绪、认知等复杂的心理因素会直接影响其决策行为,所以在很多情况下期望效用理论与现实情况是不相符合的,如阿莱悖论和埃尔斯伯格悖论等.这些与传统期望效用理论不一致的现象促使新的理论不断涌现.最著名的理论之一是D. Kahneman等<sup>[6-7]</sup>提出的前景理论,他们从心理学的角度来研究投资者的决策行为,提出损失厌恶的概念,指出在一定的参照收益点下人们对损失比对盈利更敏感,用S-型损失厌恶

效用函数去代替传统的凹效用函数,提出具有损失厌恶特征的投资组合决策问题.

国内外学者对具有损失厌恶特征的投资组合决策问题进行了一系列研究.C. Fulga<sup>[8]</sup>将投资者的损失厌恶偏好纳入传统的均值-方差(M-V)模型中,构建组合收益分布的下方风险度量,分析了损失厌恶系数对模型最优解的影响.Wang Jia等<sup>[9]</sup>研究了损失厌恶行为对多期投资决策的影响.A. B. Berke-laar等<sup>[10]</sup>将在基于前景理论的S-型损失厌恶函数下投资者的最优投资组合权重与在基于期望效用理论的凹形幂效用函数下投资者的最优投资组合权重进行了比较.He Xuedong等<sup>[11]</sup>提出了以参照点、S-型损失厌恶效用函数和概率加权为特征的单期投资组合选择模型.V. Kobberling等<sup>[12]</sup>提出了S-型指数损失厌恶效用函数,当收益变化率比较小时,该函数比S-型损失厌恶效用函数更敏感.张小涛<sup>[13]</sup>提出了对数损失厌恶效用函数,该效用函数克服了在前景理论中投资者在面对损失时一直是风险喜好的不足,并对中国股票市场数据进行了实证分析,证实了中国股票投资者普遍存在损失厌恶的现象.刘慧晖<sup>[14]</sup>将双曲绝对风险规避(HARA)函数引入S-型损失厌恶效用函数中,提出了S-型双曲绝对风险规

收稿日期:2022-10-15

基金项目:国家自然科学基金(71761019)资助项目.

作者简介:温利民(1979—),男,江西石城人,教授,博士,博士生导师,主要从事精算学与金融统计推断的研究. E-mail: wlmjxnu@163.com

避(S-HARA)效用函数. Jin Xiu 等<sup>[15]</sup>基于不确定性理论建立了同时考虑损失厌恶效用、流动性风险和多样化程度的多周期3个目标的不确定性投资组合模型. 为了方便计算,一些学者将S-型损失厌恶函数简化成线性损失厌恶函数. I. Fortin 等<sup>[16]</sup>研究了线性损失厌恶投资组合模型与M-V、M-CVaR投资组合模型具有相同最优解的条件,并对欧美股票市场进行了实证分析. E. de Giorgi 等<sup>[17]</sup>指出线性损失厌恶投资组合模型和S-型损失厌恶投资组合模型具有近似相等的最优解. T. A. Pirvu 等<sup>[18]</sup>研究了具有S-型损失厌恶、S-型指数损失厌恶和线性损失厌恶的这3类效用函数的投资者在由无风险债券和多个风险股票构成的单阶段投资组合下的最优资产配置策略,并讨论了这种权重分配方案和基于均值-方差理论的投资组合模型之间的差异. 叶丹<sup>[19]</sup>基于前景理论建立了在线性损失厌恶函数和S-型非线性效用函数下的期望效用最大化模型,并对美国股票市场实证分析,验证了所建模型的合理性和有效性.

然而,当投资收益高于参照收益点时,线性损失厌恶效用函数在投资面对盈利时不满足边际效用递减规律. 因此,本文在线性损失厌恶函数的基础上结合指数效用函数,构建混合指数型损失厌恶投资组合(MELA)模型,并进行实证研究.

## 1 混合指数型损失厌恶的效用函数

D. Kahneman 等<sup>[6-7]</sup>创立的前景理论,从心理学角度来研究投资者的投资决策行为,发现投资者在进行投资时更关心的是最终收益与他们所预设的参照收益之间的差距,并且相同的损失和相同的盈利给他们带来的边际效用是不相等的,他们将这种心理特征称为损失厌恶. 它描述的是相对于给定的参照收益点,投资者对损失所带来的敏感程度大于对盈利所带来的敏感程度,具体包括2种行为特征: 1) 投资者利用参照收益点衡量损失和盈利,当收益小于参照收益点时定义为损失,当收益大于参照收益点时定义为盈利; 2) 相对于参照收益点,相同的损失和盈利所带来的边际效用是不相等的,其中前者效用大于后者效用. 根据投资者的损失厌恶特征, D. Kahneman 等<sup>[6]</sup>构造了S-型损失厌恶效用函数,具体定义如下:

$$U(y) = \begin{cases} (y - \hat{y})^\alpha, & y > \hat{y}, \\ -\lambda(\hat{y} - y)^\beta, & y \leq \hat{y}. \end{cases}$$

从直观地来看,S-型损失厌恶效用函数是分段

幂函数, $\hat{y}$ 为投资者的参照收益点; $\alpha$ 和 $\beta$ 是风险规避系数,该系数越大表明投资者对风险的厌恶程度越高,一般满足 $0 < \alpha, \beta \leq 1$ ;  $\lambda$ 是损失厌恶系数,它反映的是损失的边际效用大于盈利的边际效用的程度,一般 $\lambda > 1$ .

进一步地,考虑S-型损失厌恶效用函数的特殊形式. I. Fortin 等<sup>[16]</sup>提出了线性损失厌恶效用函数:

$$U(y) = \begin{cases} y, & y > \hat{y}, \\ (1 + \lambda)y - \lambda\hat{y}, & y \leq \hat{y}. \end{cases}$$

注意到,当 $y > \hat{y}$ 时,投资者的收益大于参照收益点,从而有较大的效用,但随着收益的增加,边际效用呈递减的趋势<sup>[20]</sup>. 而在文献[16]中的效用总是 $y$ 的线性函数,在实际中不能解释这种边际效用递减特征. 综上所述,考虑损失厌恶效用函数:

$$U(y) = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda(y - \hat{y})}) / \lambda + y, & y > \hat{y}, \\ y - \lambda(\hat{y} - y), & y \leq \hat{y}. \end{cases}$$

称之为混合指数型损失厌恶函数.

记 $(x)^+ = \max\{x, 0\}$ ,则 $U(y)$ 可表述为

$$U(y) = (1 - e^{-\lambda(y - \hat{y})^+}) / \lambda + y - \lambda(\hat{y} - y)^+.$$

根据 $U(y)$ 的表达式,若投资者的财富 $y$ 高于 $\hat{y}$ ,则投资者是风险厌恶型的;若投资者的财富 $y$ 低于 $\hat{y}$ ,则投资者是风险喜好型的. 这与大多数投资者的投资心态相吻合. 容易得到 $U(y)$ 的图形(见图1).

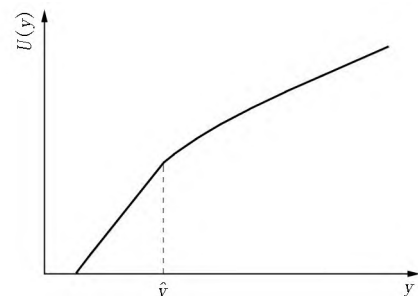


图1 混合指数型损失厌恶函数

从图1中可看出:当 $y < \hat{y}$ 时, $U(y)$ 是 $y$ 的线性函数,斜率为 $1 + \lambda$ ,它反映了投资者喜好风险的态度;当 $y > \hat{y}$ 时,曲线是凹形的,它反映了投资者是风险厌恶型的,其边际效用呈递减的趋势.

## 2 基于混合指数型损失厌恶函数的投资组合模型

### 2.1 多元风险的投资组合模型

假设有 $n$ 个风险资产组成的投资组合,其收益

率分别为  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . 设投资者投资在各个风险资产上的比例分别为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . 在不允许卖空的前提下, 有  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$  且  $x_i \in [0, 1]$ , 则基于混合指数型损失厌恶效用函数的期望效用最大化模型 (MELA) 可以描述为

$$\max_{x \in \mathbf{R}^n} M_E(x) = \max_{x \in \mathbf{R}^n} (E((1 - e^{-\lambda(r\hat{x} - \hat{y})^+}) / \lambda + r\hat{x} - \lambda(\hat{y} - r\hat{x})^+)) \Big| \sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad (1)$$

其中  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)'$ ,  $\hat{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ .

引理 1 若风险资产收益率服从正态分布, 即  $r \sim N(\mu, \Sigma)$ , 其中  $\mu \in \mathbf{R}^n$ ,  $\Sigma \in \mathbf{R}^{n \times n}$  分别是均值向量和协方差矩阵, 则  $M_E(x)$  为

$$M_E(x) = (1 - \Phi(\alpha) - Q) / \lambda + P,$$

其中

$$Q = e^{\lambda^2 x' \Sigma x / 2 + \alpha \lambda \sqrt{x' \Sigma x}} (1 - \Phi(\alpha + \lambda \sqrt{x' \Sigma x})),$$

$$P = \mu' \hat{x} - \lambda \sqrt{x' \Sigma x} (\alpha \Phi(\alpha) + \varphi(\alpha)),$$

这里  $\alpha = (\hat{y} - \mu' \hat{x}) / \sqrt{x' \Sigma x}$ ,  $\varphi(\cdot)$  与  $\Phi(\cdot)$  分别为标准正态分布的密度函数和分布函数.

证 记  $Z = r\hat{x}$ . 由于  $r \sim N(\mu, \Sigma)$ , 所以  $Z \sim N(\mu' \hat{x}, x' \Sigma x)$ . 注意到

$$E(e^{-\lambda(Z - \hat{y})^+}) = \int_{\hat{y}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi x' \Sigma x}} \exp(-(z - \mu x)^2 / (2x' \Sigma x) - \lambda(z - \hat{y})) dz = \exp(\lambda \hat{y} - \lambda \mu' \hat{x} + \lambda^2 x' \Sigma x / 2) \int_{\hat{y}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi x' \Sigma x}} \exp(-(z - \mu' \hat{x} + \lambda x' \Sigma x)^2 / (2x' \Sigma x)) dz = \exp(\lambda \hat{y} - \lambda \mu' \hat{x} + \lambda^2 x' \Sigma x / 2) (1 - \Phi((\hat{y} - \mu' \hat{x} + \lambda x' \Sigma x) / \sqrt{x' \Sigma x})) = Q,$$

$$E(Z - \lambda(\hat{y} - Z)^+) = \mu' \hat{x} - \lambda \int_{-\infty}^{\hat{y}} \frac{\hat{y} - z}{\sqrt{2\pi x' \Sigma x}} \exp(-(z - \mu' \hat{x})^2 / (2x' \Sigma x)) dz = \mu' \hat{x} - \lambda \sqrt{x' \Sigma x} \cdot ((\hat{y} - \mu' \hat{x}) \Phi((\hat{y} - \mu' \hat{x}) / \sqrt{x' \Sigma x}) / \sqrt{x' \Sigma x} + \varphi((\hat{y} - \mu' \hat{x}) / \sqrt{x' \Sigma x})) = P,$$

则  $M_E(x) = (1 - \Phi(\alpha) - Q) / \lambda + P$ . 引理 1 得证.

推论 1 设  $r \sim N(\mu, \Sigma)$ , 则最优投资组合问题 (1) 的解等价于

$$\max_{x \in \mathbf{R}^n} M_E(x) = \max_{x \in \mathbf{R}^n} ((1 - \Phi(\alpha) - Q) / \lambda + P \Big| \sum_{i=1}^n x_i = 1).$$

### 2.2 2 元资产的最优投资策略

显然, 最优化问题 (1) 是  $n$  元极值问题, 其最优

解依赖于  $n$  元随机变量  $r$  的分布. 在大多数情况下无显式解, 为了简化, 考虑在 2 元资产条件下的最优投资策略.

假设仅有 2 种投资: 一种是风险投资, 收益率为  $r$ ; 另一种是无风险投资, 收益率为  $r_f$ . 设  $x$  与  $(1 - x)$  分别为投资者投资在该 2 种资产上的比例, 则总投资收益率为  $R(x) = rx + r_f(1 - x)$ . 在混合指数型损失厌恶的效用函数下, 最优投资组合问题为

$$\max_{x \in [0, 1]} M_E(x) = \max_{x \in [0, 1]} (E((1 - e^{-\lambda(R(x) - \hat{y})^+}) / \lambda + R(x) - \lambda(\hat{y} - R(x))^+)). \quad (2)$$

接下来分析当风险资产收益率  $r$  分别服从两点分布和连续分布时最优化问题 (2) 的最优解情况.

首先, 假设风险资产的收益率  $r$  服从离散型分布

$$P(r = r_h) = p = 1 - P(r = r_l),$$

其中  $r_h$  表示高收益率,  $r_l$  表示低收益率, 且满足  $r_l < r_f < r_h$ , 称之为 2 元离散型分布投资组合模型.

根据实际情况, 不妨设  $\hat{y} \geq r_f$ , 否则投资者将全部资产投资于无风险资产. 在混合指数型损失厌恶的效用函数下, 最优投资问题为

$$\max_{x \in [0, 1]} ((p(1 - e^{-\lambda(R_h(x) - \hat{y})^+}) / \lambda + (1 - p)(1 - e^{-\lambda(R_l(x) - \hat{y})^+})) + pR_h(x) + (1 - p)R_l(x) - \lambda(p(\hat{y} - R_h(x))^+ + (1 - p)(\hat{y} - R_l(x))^+)), \quad (3)$$

其中  $R_h(x) = r_f + (r_h - r_f)x$ ,  $R_l(x) = r_f + (r_l - r_f)x$ .

定理 1 设风险资产的收益率  $r$  服从两点分布  $P(r = r_h) = p = 1 - P(r = r_l)$ , 无风险资产的收益率为  $r_f$ , 令  $r_l < r_f < r_h$  且  $r_f$  满足  $E(r - r_f) > 0$ , 记

$$\lambda^* = (p(r_h - r_f) + p(r_h - r_l) + r_l - r_f) / ((1 - p)(r_f - r_l)),$$

则

1) 当  $\ln(p(r_h - r_f) / (\lambda(1 - p)(r_f - r_l) - p(r_h - r_l) - r_l + r_f)) < \lambda(r_h - \hat{y}) / (r_h - r_f)$  且  $\hat{y} < r_h$  时, 最优化问题 (3) 的最优解为

$$x^* = \begin{cases} (\ln(p(r_h - r_f) / (\lambda(1 - p)(r_f - r_l) - p(r_h - r_l) - r_l + r_f)) / (\lambda(r_h - r_f)) + (\hat{y} - r_f) / (r_h - r_f)) / (\lambda(r_h - r_f)) + (\hat{y} - r_f) / (r_h - r_f), & 0 < \lambda < \lambda^*, \\ (\hat{y} - r_f) / (r_h - r_f), & \lambda \geq \lambda^*. \end{cases}$$

2) 当  $\ln(p(r_h - r_f) / (\lambda(1 - p)(r_f - r_l) - p(r_h - r_l) - r_l + r_f)) \geq \lambda(r_h - \hat{y}) / (r_h - r_f)$  且  $\hat{y} < r_h$  时, 最优化问题 (3) 的最优解为

$$x^* = \begin{cases} 1, & 0 < \lambda < \lambda^*, \\ (\hat{y} - r_f) / (r_h - r_f), & \lambda \geq \lambda^*. \end{cases}$$

3) 当  $\hat{y} \geq r_h$  时,最优化问题(3)的最优解为  $x^* = 1$ .

证 首先,当  $\hat{y} = r_f$  时,有

$$M_E(x) = p(1 - e^{-\lambda(r_h - r_f)x}) / \lambda + (p(r_h - r_l) + (\lambda(1-p) + 1)(r_l - r_f))x + r_f,$$

对上式关于  $x$  求 1 阶偏导得

$$\partial M_E(x) / \partial x = p(r_h - r_f) e^{-\lambda(r_h - r_f)x} + p(r_h - r_l) + (\lambda(1-p) + 1)(r_l - r_f),$$

令  $\partial M_E(x) / \partial x = 0$  解得

$$x^* = (\ln(p(r_h - r_f) / (\lambda(1-p)(r_f - r_l) - p(r_h - r_l) - r_l + r_f))) / (\lambda(r_h - r_f)).$$

由于  $\partial^2 M_E(x) / \partial x^2 = -\lambda p(r_h - r_f)^2 e^{-\lambda(r_h - r_f)x} < 0$ , 因此  $\partial M_E(x) / \partial x$  是  $x$  的减函数,可得  $M_E(x)$  在极值点  $x^*$  处取得最大值.

注意到,当  $0 < \lambda < \lambda^*$  时  $x^* > 0$ ; 当  $\lambda \geq \lambda^*$  时  $x^* \leq 0$ . 因此,当  $\hat{y} = r_f$  时 结论成立.

其次,当  $r_f < \hat{y} < r_h$  时,记  $[0, 1] = I_1 \cup I_2$  其

中  $I_1 = [0, (\hat{y} - r_f) / (r_h - r_f)]$ ,  $I_2 = ((\hat{y} - r_f) / (r_h - r_f), 1]$ . 当  $x \in I_1$  时,有

$$M_E(x) = r_f - \lambda(\hat{y} - r_f) + (1 + \lambda)(p(r_h - r_l) + r_l - r_f)x.$$

对上式关于  $x$  求 1 阶偏导得

$$\partial M_E(x) / \partial x = (1 + \lambda)(p(r_h - r_l) + r_l - r_f).$$

由于  $\partial M_E(x) / \partial x > 0$ , 所以  $M_E(x)$  在  $I_1$  上是增函数.

当  $x \in I_2$  时,有

$$M_E(x) = p(1 - e^{-\lambda(R_h(x) - \hat{y})}) / \lambda + (p(r_h - r_l) + (\lambda(1-p) + 1)(r_l - r_f))x + r_f - \lambda(1-p)(\hat{y} - r_f).$$

对上式关于  $x$  求 1 阶偏导得

$$\partial M_E(x) / \partial x = p(r_h - r_f) e^{-\lambda(R_h(x) - \hat{y})} + p(r_h - r_l) (\lambda(1-p) + 1)(r_l - r_f).$$

令  $\partial M_E(x) / \partial x = 0$  解得

$$x^* = (\ln(p(r_h - r_f) / (\lambda(1-p)(r_f - r_l) - p(r_h - r_l) - r_l + r_f))) / (\lambda(r_h - r_f)) + (\hat{y} - r_f) / (r_h - r_f).$$

由于  $\partial^2 M_E(x) / \partial x^2 = -\lambda p(r_h - r_f)^2 e^{-\lambda(r_h - r_f)x} < 0$ , 因此  $\partial M_E(x) / \partial x$  是  $x$  的减函数,可得  $M_E(x)$  在极值点  $x^*$  处取得最大值.

注意到,当  $0 < \lambda < \lambda^*$  时  $x^* > (\hat{y} - r_f) / (r_h -$

$r_f)$ ; 当  $\lambda \geq \lambda^*$  时  $x^* \leq (\hat{y} - r_f) / (r_h - r_f)$ . 因此证明了定理的第 1) 和第 2) 部分.

最后,当  $\hat{y} \geq r_h$  时,有

$$M_E(x) = r_f - \lambda(\hat{y} - r_f) + (1 + \lambda)(p(r_h - r_l) + r_l - r_f)x.$$

对上式关于  $x$  求 1 阶偏导得

$$\partial M_E(x) / \partial x = (1 + \lambda)(p(r_h - r_l) + r_l - r_f).$$

由于  $\partial M_E(x) / \partial x > 0$ , 因此  $M_E(x)$  在  $[0, 1]$  上是增函数,则最优化问题(3)的最优解为  $x^* = 1$ . 因此证明了定理的第 3) 部分.

定理 1 给出了当收益率服从两点分布时的 2 元投资组合策略. 在实际应用中,收益率常常是连续型随机变量. 接下来讨论收益率服从连续型分布的 2 元投资组合策略.

假设在 2 元资产中风险资产的收益率  $r$  服从连续型分布,其密度函数和分布函数分别为  $f_r(r)$ 、 $F_r(r)$ , 期望  $E(r) = \mu$  且  $E(r - r_0) > 0$ . 根据实际情况,不妨设  $\hat{y} \geq r_f$ , 否则投资者将全部资产投资于无风险资产. 在混合指数型损失厌恶的效用函数下,当  $x \in (0, 1]$  时期望效用函数为

$$M_E(x) = (1 - F_r((\hat{y} - r_f) / x + r_f) - \int_{(\hat{y} - r_f) / x + r_f}^{+\infty} e^{-b(R(x) - \hat{y})} f_r(r) dr) / \lambda + r_f + (\mu - r_f)x - \lambda \int_{-\infty}^{(\hat{y} - r_f) / x + r_f} (\hat{y} - R(x)) f_r(r) dr.$$

当  $x = 0$  时,有  $M_E(x) = (1 + \lambda)r_f - \lambda\hat{y}$ .

容易验证  $M_E(x)$  在  $x = 0$  处是右连续的,因此基于混合指数型损失厌恶效用函数的最优投资组合模型为

$$\max_{x \in [0, 1]} M_E(x) = \max_{x \in [0, 1]} ((1 - F_r((\hat{y} - r_f) / x + r_f) - \int_{(\hat{y} - r_f) / x + r_f}^{+\infty} e^{-\lambda(R(x) - \hat{y})} f_r(r) dr) / \lambda + r_f + (\mu - r_f)x - \lambda \int_{-\infty}^{(\hat{y} - r_f) / x + r_f} (\hat{y} - R(x)) f_r(r) dr). \quad (4)$$

求解最优化问题(4),得到如下定理.

定理 2 设风险资产的收益率  $r$  服从连续型分布,其分布函数和密度函数分别为  $F_r(r)$  和  $f_r(r)$ , 期望为  $E(r) = \mu$  且  $E(r - r_f) > 0$ , 令  $\lambda \geq 1$ , 记

$$\lambda^* = (r_f - \mu) / \int_{-\infty}^{r_f} (r - r_f) f_r(r) dr,$$

则

1) 当  $1 \leq \lambda \leq \lambda^*$  时,最优化问题(4)的最优解为  $x^* = 1$ ;

2) 当  $\lambda > \lambda^*$  时, 最优化问题 (4) 的最优解为  $x^* = \min\{x_0, 1\}$ , 其中  $x_0$  是方程

$$\int_{(\hat{y}-r_f)/x+r_f}^{+\infty} (r-r_f) e^{-\lambda(R(x)-\hat{y})} f_r(r) dr + \lambda \int_{-\infty}^{(\hat{y}-r_f)/x+r_f} (r-r_f) f_r(r) dr + \mu - r_f = 0 \quad (5)$$

的隐式解.

证 对  $M_E(x)$  关于  $x$  求 1 阶偏导得

$$\partial M_E(x) / \partial x = \int_{(\hat{y}-r_f)/x+r_f}^{+\infty} (r-r_f) e^{-\lambda(R(x)-\hat{y})} \cdot f_r(r) dr + \lambda \int_{-\infty}^{(\hat{y}-r_f)/x+r_f} (r-r_f) f_r(r) dr + \mu - r_f.$$

对上式取极限得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \partial M_E(x) / \partial x = (1 + \lambda)(\mu - r_f),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \partial M_E(x) / \partial x = \lambda \int_{-\infty}^{r_f} (r - r_f) f_r(r) dr + \mu - r_f.$$

注意到, 当  $1 \leq \lambda \leq \lambda^*$  时, 有  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \partial M_E(x) / \partial x > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \partial M_E(x) / \partial x \geq 0$ . 由于

$$\partial^2 M_E(x) / \partial x^2 = (1 - \lambda)(\hat{y} - r_f)^2 f_r((\hat{y} - r_f) / x + r_f) / x^3 - \lambda \int_{(\hat{y}-r_f)/x+r_f}^{+\infty} (r - r_0)^2 e^{-\lambda(R(x)-\hat{y})} f_r(r) dr < 0,$$

所以  $\partial M_E(x) / \partial x$  是  $x$  的减函数, 则最优化问题 (4) 的最优解为  $x^* = 1$ . 因此证明了定理的第 1) 部分.

当  $\lambda > \lambda^*$  时, 有  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \partial M_E(x) / \partial x > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \partial M_E(x) / \partial x < 0$ . 由于  $\partial^2 M_E(x) / \partial x^2 < 0$ , 所以在  $[0, +\infty)$  上存在唯一的点  $x_0$  使得  $\partial M_E(x) / \partial x|_{x=x_0} = 0$ , 且  $x_0$  满

足式 (5), 可得  $M_E(x)$  在极值点  $x_0$  处取得最大值, 则最优化问题 (4) 的最优解为  $x^* = \min\{x_0, 1\}$ . 因此证明了定理的第 2) 部分.

### 3 实证研究

在实证研究中, 利用中国股票市场数据, 研究混合指数型损失厌恶投资组合 (MELA) 模型的表现, 计算模型的最优投资组合权重、投资组合收益率等评价指标. 然后, 将本文的结果与传统的均值-方差 (M-V) 模型的结果进行对比, 并分析在混合指数型损失厌恶的效用函数下损失厌恶系数对投资者的投资组合收益率和投资权重的影响.

#### 3.1 数据选取和参数选择

本文从上证 A 股中随机选择 5 只股票来进行模拟验证, 这 5 只股票分别是上海机场 (600009)、杭州解百 (600814)、鲁信创投 (600783)、中信证券 (600030)、中国石化 (600028). 采用这 5 只股票从 2017 年 8 月至 2019 年 7 月的月开盘价数据和月收盘价数据, 共 240 个数据. 收益率用  $r_t = (P_t - O_t) / O_t$  来计算, 其中  $P_t, O_t$  分别表示第  $t$  个月的收盘价和开盘价,  $t = 1, 2, \dots, 24$ . 以 2019 年的 1 年期国债利率作为无风险收益率即  $r_f = 0.0258$ , 以 2019 年的 15 年期国债利率作为参照收益率水平即  $\hat{y} = 0.0340$ . 5 只股票的描述性统计如表 1 所示. 以上数据来源于国泰安 CSMAR 数据库.

表 1 样本股票描述性统计量(从 2017 年 8 月至 2019 年 7 月)

	上海机场	鲁信创投	杭州解百	中信证券	中国石化
均值	0.037 7	0.022 1	-0.029 9	0.009 5	-0.002 5
标准差	0.078 2	0.244 0	0.067 0	0.099 1	0.068 5
最小值	-0.115 2	-0.198 4	-0.141 3	-0.153 7	-0.158 3
中位数	0.036 8	-0.049 7	-0.043 2	0.004 2	0.006 1
最大值	0.202 0	0.892 6	0.145 7	0.264 0	0.149 4

#### 3.2 实证结果与分析

利用 5 只股票的 24 个月的月收益率分别构建均值-方差 (M-V) 模型以及基于混合指数型损失厌恶函数的投资组合 (MELA) 模型. 对于损失厌恶模型, 考虑在损失厌恶系数分别为 1、2、3、4 的 4 种情形下混合指数型损失厌恶函数的投资组合模型, 分别求解其最优投资组合配置比例、最优投资组合收益率和方差, 并与传统投资组合模型 (M-V 模型) 进行比较. 为了更好地全面比较不同投资组合模型的投资绩效表现, 引入常用的投资绩效评价指标 (夏普比

率和信息比率), 对不同投资组合模型进行进一步比较.

夏普比率 (Sharpe ratio) 是一个可以同时考虑收益与风险进行综合考虑的经典指标, 目的是计算投资组合每承受 1 单位总风险会产生多少的超额收益. 当在投资组合内的资产皆为风险性资产时, 适用夏普比率. 每个投资组合都可以计算夏普比率, 即投资回报与风险的比例, 这个比率越高, 投资组合越佳. 其计算公式为

$$S_R = (E(R_p) - r_f) / \sigma_p,$$

其中  $E(R_p)$  为投资组合预期收益率,  $r_f$  为无风险收益率,  $\sigma_p$  为投资组合标准差。

信息比率 (information ratio) 是用单一数值揭示投资组合的均值和方差特性的测定方法, 建立在 H. M. Markowitz 的均值-方差模型的基础上, 用来衡量由超额风险所带来的超额收益。它是超额收益均值与其标准差之比, 这个比率越高说明所获得的超额收益越高, 则投资组合越佳, 其计算公式为

$$I_R = E(R_p - \hat{y}) / \sigma_p$$

其中  $E(R_p - \hat{y})$  为投资组合超额收益,  $\hat{y}$  为参照收益水平,  $\sigma_p$  为投资组合标准差。

在实证研究中, 对在传统的 H. M. Markowitz 的投资组合理论中的均值-方差 (M-V) 模型和基于混合指数型损失厌恶函数的投资组合 (MELA) 模型进行比较研究。利用 Matlab 软件对 M-V 和 MELA 2 种模型分别计算, 得到在不同情形下投资组合模型的最优组合分配比例, 不同模型最优投资组合分配比例及投资组合绩效指标如表 2 和表 3 所示。

由表 2 实证结果数据可得: 不同模型的最优分配比例不相同。在损失厌恶模型下, 分配在上海机场

股票上的投资比例远大于分配在其余 4 只股票上的投资比例, 其原因是上海机场股票的收益率的均值高于参照收益点, 而其余 4 支股票的收益率的均值都低于参照收益点, 因此具有损失厌恶特征的投资者会在上海机场这只股票上增加投资比例。当损失厌恶系数增加时, 风险较低的 2 项资产 (杭州解百和中国石化) 的投资权重有所增加, 其原因是: 损失厌恶系数增加意味着投资者对损失的厌恶程度增加, 其可能采用更为保守的投资策略。而在传统的 M-V 模型下其分配比例较均衡, 其原因是: 传统的 M-V 模型仅从最小化风险的角度进行分析, 没有考虑投资者的心理状况。

由表 3 的数据结果可得: 从投资组合的组合收益指标来看, MELA 模型的组合收益率显著高于 M-V 模型的组合收益率; 从投资组合的组合标准差指标来看, MELA 模型的组合标准差略大于 M-V 模型的组合标准差, 其原因是 MELA 模型解出的投资组合分配比例不是很均衡; 从投资组合的夏普比率和信息比率指标来看, MELA 模型的夏普比率、信息比率均高于 M-V 模型的夏普比率、信息率。因此可以得出结论: MELA 模型优于 M-V 模型。

表 2 不同投资组合模型的最优投资组合分配比例

模型	损失厌恶系数	上海机场	鲁信创投	杭州解百	中信证券	中国石化
MELA	$\lambda = 1$	0.915 6	0.020 6	0.012 2	0.022 5	0.029 1
	$\lambda = 2$	0.929 6	0.010 3	0.012 2	0.012 5	0.036 4
	$\lambda = 3$	0.927 7	0.010 3	0.011 4	0.013 5	0.037 1
	$\lambda = 4$	0.936 6	0.014 3	0.008 4	0.003 6	0.037 1
M-V		0.760 0	0.041 7	0.000 0	0.010 9	0.187 4

表 3 投资组合模型的绩效指标

绩效指标	MELA 模型				M-V 模型
	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	
组合收益率	0.034 8	0.035 0	0.034 9	0.035 4	0.029 2
组合标准差	0.073 8	0.074 2	0.074 1	0.065 3	0.065 3
夏普比率	0.121 8	0.124 1	0.123 3	0.128 3	0.052 1
信息比率	0.010 7	0.013 5	0.012 6	0.018 2	-0.073 5

## 4 结语

依据前景理论, 在考虑投资者损失厌恶的心理特征基础上, 本文针对线性损失厌恶函数的不足提出了混合指数型损失厌恶函数, 并构建了 MELA 模型。假设在 2 元资产环境下, 给出了 MELA 模型的最优投资策略。从中国上证 A 股中选取 5 只股票进行实证研究, 计算 MELA 模型的最优投资组合权重, 通过一些投资绩效指标 (投资组合收益率、投资组

合标准差、夏普比率、信息比率) 与 M-V 模型进行比较, 结果得出 MELA 模型优于 M-V 模型的结论。

需要指出的是, 本文仅研究了静态损失厌恶投资组合模型, 然而由于市场具有随机不确定性, 损失厌恶投资者用于衡量盈利和损失的参照点会经常随着财富状况和时间的变化而动态更新, 所以研究在动态参照点下的损失厌恶效用会更符合投资者的实际投资决策行为。因此如何将本文的 MELA 模型推广到动态损失厌恶投资组合模型是值得进一步研究的问题。

## 5 参考文献

- [1] 约翰·梅纳德·凯恩斯. 就业、利息和货币通论 [M]. 陆梦龙, 译. 北京: 中国社会科学出版社, 2009.
- [2] VON NEUMANN J, MORGENSTERN O. The theory of games and economic behavior [M]. Princeton: Princeton University Press, 1944.
- [3] MARKOWITZ H. Portfolio selection [J]. The Journal of Finance, 1952, 7(1): 77-91.
- [4] OSBORNE M F M. Brownian motion in the stock market [J]. Operations Research, 1959, 7(2): 145-173.
- [5] FAMA E F. Random walks in stock market prices [J]. Financial Analysts Journal, 1965, 21(5): 55-59.
- [6] KAHNEMAN D, TVERSKY A. Prospect theory: an analysis of decision under risk [J]. Econometrica, 1979, 47(2): 263-291.
- [7] TVERSKY A, KAHNEMAN D. Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty [J]. Journal of Risk and Uncertainty, 1992, 5(4): 297-323.
- [8] FULGA C. Portfolio optimization under loss aversion [J]. European Journal of Operational Research, 2016, 251(1): 310-322.
- [9] WANG Jia, ZHOU Mengchu, GUO Xiwang, et al. Multi-period asset allocation considering dynamic loss aversion behavior of investors [J]. IEEE Transactions on Computational Social Systems, 2019, 6(1): 73-81.
- [10] BERKELAAR A B, KOUWENBERG R, POST T. Optimal portfolio choice under loss aversion [J]. Review of Economics and Statistics, 2004, 86(4): 973-987.
- [11] HE Xuedong, ZHOU Xunyu. Portfolio choice under cumulative prospect theory: an analytical treatment [J]. Management Science, 2011, 57(2): 315-331.
- [12] KÖBBERLING V, WAKKER P P. Preference foundations for nonexpected utility: a generalized and simplified technique [J]. Mathematics of Operations Research, 2003, 28(3): 395-423.
- [13] 张小涛. 基于损失厌恶的长期资产配置研究 [D]. 天津: 天津大学, 2005.
- [14] 刘慧晖. S型效用函数下的模糊多属性决策方法研究 [D]. 北京: 华北电力大学, 2017.
- [15] JIN Xiu, CHEN Na, YUAN Ying. Multi-period and tri-objective uncertain portfolio selection model: a behavioral approach [J]. The North American Journal of Economics and Finance, 2019, 47: 492-504.
- [16] FORTIN I, HLOUSKOVA J. Optimal asset allocation under linear loss aversion [J]. Journal of Banking & Finance, 2011, 35(11): 2974-2990.
- [17] DE GIORGI E, HENS T, MAYER J. Computational aspects of prospect theory with asset pricing applications [J]. Computational Economics, 2007, 29(3/4): 267-281.
- [18] PIRVU T A, SCHULZE K. Multi-stock portfolio optimization under prospect theory [J]. Mathematics and Financial Economics, 2012, 6(4): 337-362.
- [19] 叶丹. 基于非线性效用函数的投资组合优化模型 [D]. 贵阳: 贵州大学, 2012.
- [20] 高鸿业. 西方经济学 [M]. 2版. 北京: 中国人民大学出版社, 2004.

## The Portfolio Model Based on Mixed Exponential Loss Aversion Function

WEN Limin<sup>1,2</sup>, FENG Huizhen<sup>1</sup>, LI Junxue<sup>1</sup>, ZHOU Jingcui<sup>1</sup>

(1. Department of Statistics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China;

2. Research Center of Management Science and Engineering, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

**Abstract:** Combined with the core idea of prospect theory-loss aversion, the allocation of different risk assets from the perspective of expected utility maximization is studied in this paper. On the basis of the linear loss aversion function, and combined with the nature of the exponential utility function, the new utility function that is mixing loss aversion with exponential function is put forward, the mixed exponential loss aversion (MELA) portfolio model has been established. The empirical study on Chinese stock market data shows that the MELA model is superior to the Mean-Variance model.

**Key words:** loss aversion; utility function; portfolio

(责任编辑: 曾剑锋)