章溢. 保费计算原理的比较及最优性分析[J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2023,47(1):15-24.
ZHANG Yi. The comparison and optimality analysis of insurance premium calculation principles[J]. Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science),2023,47(1):15-24.

文章编号:1000-5862(2023)01-0015-10

# 保费计算原理的比较及最优性分析

章 溢
(江西师范大学财政金融学院,江西 南昌 330022)

摘要:该文先从保费计算原理的需要满足的性质出发,对非寿险精算的常用保费计算原理的理论和实际应用进行了分析和比较.然后,基于保费估计的标准差准则,对各种保费计算原理的最优性进行了分析.最后,利用 Bootstrap 方法对丹麦火灾保险损失数据进行重抽样,根据重抽样的数据再次对保费计算原理的最优性进行了验证.

关键词:保费计算原理;风险度量;最优性;Bootstrap;VaR
中图分类号:O 211 文献标志码:A DOI:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2023.01.03

## 0 引言

保费计算原理是对给定风险保单在制定合适保费的过程中所遵循的原则.由于风险是随机变量,而随机变量与其分布函数是一一对应的,所以保费计算原理可以看成从非负随机变量或其分布函数的集合到非负实数集合的一个映射.在保险精算中,保费计算原理的制定与估计是精算师的重要任务之一.

从平衡原则来看,若保险公司将收取风险的数学期望值作为该风险的保费,则从长期来看,保险公司将不亏不赚,达到一种平衡.这种保费计算方法被称为净保费原理或纯保费原理.然而,考虑公司的运营成本、人力成本、安全性等因素,保险公司不可能仅仅收取净保费,否则保险公司终将破产[1].在净保费原理上,以风险的数学期望为基础,增加一定的安全附加保费,得到在寿险精算中常用的期望值保费原理[2].然而,在保险的发展过程中,精算师发现,仅仅利用风险的数学期望制定保费是不合理的,在安全附加保费中应该更多地考虑风险的方差.因而提出方差保费原理、标准差保费原理、修正方差保费原理等.瑞士精算师 H. Bühlmann[3] 指出:标准差原理是在财产保险与意外事故保险中使用最多的保费原理,而方差保费原理是学者们在原理上研究更多的一种保费原理.利用风险随机变量的指数矩可以构造更多的保费原理,如 Esscher 保费原理、指数保费原理、Kamps 保费原理等.

本文介绍了在非寿险中常用的保费计算原理,并讨论了保费计算原理的性质,同时对各种保费原理的计算进行比较分析.最后,基于 Bootstrap 方法对保费计算原理的最优性进行了研究.

## 1 保费计算原理的性质

保单的保险费也被称为保费,即保险的价格,是投保人为了将自身的风险 $X$ 转化给保险公司而缴纳的费用.由于风险是非负随机变量,所以保费计算原理是风险的集合到非负实数的一个映射.

**定义 1** 设$(\Omega,\xi,P)$为一个概率空间,用$\chi=\{X:X\geqslant 0,E(X^2)<\infty\}$表示可保风险集合,定义可保集合$\chi$到 $\mathbf{R}^+$ 的实函数 $H(X)$,称之为风险 $X$ 的保费.从风险 $X$ 到保费 $H(X)$ 的计算过程被称为保费计算原则或保费计算原理,简称保费原理.

由于分布函数 $F_X(x)$ 完全刻画了 $X$ 的分布特征,所以保费 $H(X)$ 有时也记为 $H(F_X(x))$,其表示保费完全由分布函数确定.

并不是所有从风险集合$\chi$到 $\mathbf{R}^+$ 的实函数都可

收稿日期:2022-09-10
基金项目:国家自然科学基金(72263019)资助项目.
作者简介:章 溢(1985—),女,江西南昌人,讲师,博士,主要从事经济统计与保险精算研究.E-mail:153574268@qq.com

以成为保费计算原理. 一般地,保费计算原理 $H(X)$ 需要满足一些“好的性质”,这些性质的要求有些是理论上的需要,有些是精算实务上的要求. 在下文中,用 $a$、$b$、$c$、$\alpha$、$\beta$ 表示已知的常数.

1) 正的安全负荷性(risk loading,简记为 RL): $\forall X \in \chi$,有 $H(X) > E(X)$ 或 $H(X) - E(X) > 0$.

正的安全负荷性也被称为风险附加(risk loading),这是保险实务上的需求. 一般地,称数学期望 $E(X)$ 为风险 $X$ 的净保费或纯保费. 正的安全负荷性要求保险公司收取的保费必须超过净保费 $E(X)$. 事实上,在破产理论中已经证明[1]: 若保险公司只收取净保费,则最终破产的概率为 1.

2) 无不当风险附加性(no unjustified risk loading,简记为 NU): 若 $X = c$,a. s. ,则 $H(X) = c$.

无不当风险附加性是根据保险的实际意义提出的. 当风险退化为确定性损失 $c$ 时,不需要风险附加值,保费应该等于确定性损失 $c$.

3) 极大损失性(maximal loss,简记为 ML): $\forall X \in \chi$,有 $H(X) \leqslant \operatorname{ess\,sup}(X)$,其中 $\operatorname{ess\,sup}(X) = \inf\{x \in \mathbf{R}: P(X > x) = 0\}$ 为风险 $X$ 的上确界.

4) 转移不变性(translation invariance or translation equivariance,简记为 TI): $\forall X \in \chi, a \in \mathbf{R}^+$,有

$$H(X + a) = H(X) + a.$$

转移不变性也被称为转移等价性. 在风险理论中,只有随机变量才具有不确定性. 由于固定数额 $a$ 并不产生新的风险,所以根据风险的无不当风险附加性,保费应该相应地增加该固定数额.

5) 正齐次性(positive homogeneity or scale invariance,简记为 PH): $\forall X \in \chi, b \in \mathbf{R}^+$,有

$$H(bX) = bH(X).$$

正齐次性也被称为尺度不变性或尺度等价性. 它要求当风险成倍增加时相应的保费也成倍增加. 正齐次性保证了投保人不能将同一风险分开投保而获利.

命题 1[4] 若保费计算原理 $H(X)$ 同时满足尺度不变性和转移不变性,则必然满足无不当风险附加性.

命题 1 说明: 保费计算原理的各条性质虽然是根据不同的背景提出的要求,但并不是孤立的,这些性质之间有较多的交叉性和相关性.

6) 次可加性(subadditivity,简记为 SAd): $\forall X, Y \in \chi$,有 $H(X + Y) \leqslant H(X) + H(Y)$.

在保险精算实务中,保险人制定的保费要求满足次可加性,使得投保人不能因把 2 个风险分开承保而降低保费. 次可加性类似于尺度不变性,它们都是为了避免投保人将风险分开投保而获得“套利”.

7) 对独立风险可加性(additivity for independent risks,简记为 IAd): 若 $X, Y \in \chi$ 且 $X$ 与 $Y$ 相互独立,则有 $H(X + Y) = H(X) + H(Y)$.

对独立风险可加性说明投保人将独立的风险分别投保和合起来投保具有相同的保费. 由于常数 $a$ 总是与随机变量 $X$ 相互独立的,因此,当 $Y$ 退化为常数 $a$ 时,对独立风险可加性退化为转移不变性. 故对独立风险可加性是转移不变性的推广. 换言之,对独立风险可加性比转移不变性有更高的要求.

8) 对共同单调风险可加性(comonotonic additivity,简记为 CAd): 若 $X, Y \in \chi$ 且 $X$ 与 $Y$ 共同单调,即 $\forall w_1, w_2 \in \Omega$,有

$$(X(w_1) - X(w_2))(Y(w_1) - Y(w_2)) \geqslant 0, \text{a. s.}$$

则 $H(X + Y) = H(X) + H(Y)$.

共同单调是在风险相依中最强的相依关系. 2 个风险共同单调等价于存在一个增函数 $h(\cdot)$,使得 $Y = h(X)$. 可以证明,在共同单调相依条件下,秩相关系数与 Kendall 相关系数都等于 1. 显然,若 $H(X)$ 对共同单调风险可加,则

$$H(2X) = H(X + X) = H(X) + H(X) = 2H(X),$$

即容易证明 $H(X)$ 满足尺度不变性.

9) 单调性(monotone): 若 $\forall w \in \Omega$,有

$$X(w) \leqslant Y(w), \text{a. s.}$$

则 $H(X) \leqslant H(Y)$. 单调性意味着风险更大的保单应缴纳更多的保费.

10) 保留 1 阶随机控制序(preserving first-order stochastic dominance,简记为 FSD): 若 $\forall t \geqslant 0$,有 $S_X(t) \leqslant S_Y(t)$,则 $H(X) \leqslant H(Y)$,其中 $S_X(t) = P(X > t)$ 为 $X$ 的生存函数.

设 $X$ 在 1 阶随机控制序意义下小于等于 $Y$,记为 $X \leqslant_{st} Y$,若 $S_X(t) \leqslant S_Y(t)$ 对任意 $t \in \mathbf{R}^+$ 成立. 1 阶随机控制序是比较 2 个随机变量大小的一种方法. 该性质说明: 在 1 阶随机控制序意义下,风险更大的保单应缴纳更多的保费.

11) 保留停止损失序(preserving stop-loss order,简记为 SL): 若 $\forall d \geqslant 0$,有

$$E(X - d)_+ \leqslant E(Y - d)_+,$$

则 $H(X) \leqslant H(Y)$,其中 $(x)_+ = \max\{0, x\}$.

类似于 1 阶随机控制序,停止损失序也是比较随机变量大小关系的一种度量. 在概率论中,用“$X \leqslant_{sl} Y$”表示在停止损失序意义下风险 $X$ 小于等

于风险 $Y$,若 $\forall d \geqslant 0$,有 $E(X-d)_+ \leqslant E(Y-d)_+$ 成立. 停止损失序和 1 阶随机控制序都是用于比较 2 个随机变量大小的偏序.

保费计算原理的单调性、保留 1 阶随机控制序、保留停止损失序这 3 个性质都是从保险实务中给出的性质: 风险越小的保单将收取更少的保费. 由于风险 $X$ 为非负随机变量,所以

$$E(X-d)_+ = -\int_d^{\infty}(t-d)\,\mathrm{d}S_X(t) = -\lim_{t\to\infty}(t-d)S_X(t) + \int_d^{\infty}S_X(t)\,\mathrm{d}t = \int_d^{\infty}S_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

因此,满足保留 1 阶随机控制序的保费计算原理必然满足保留停止损失序的性质.

12) 分布的连续性(continuity): 设 $X, X_n \in \chi$,且

$$\lim_{n\to\infty}F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

对所有 $F_X(x)$ 的连续点成立,则

$$\lim_{n\to\infty}H(X_n) = H(X).$$

分布的连续性是从概率统计的原理上要求的性质,当随机变量序列 $X_n$ 依分布收敛到随机变量 $X$ 时,相应的保费序列也收敛.

以上 12 条性质从各个方面刻画了保费计算原理的要求. 在实际运用中,并不要求某种保费计算原理满足所有的性质,而只需要满足部分性质即可. 保险公司根据自身的财务情况选取合适的保费计算原理. 关于保费计算原理及其性质可参照文献[5-6].

## 2　在非寿险精算中常用的保费计算原理

保险公司将根据自身的财务要求和公司的特征,选取合适的保费计算原理. 一般地,常用的保费计算原理包括期望值原理、方差保费原理、标准差保费原理、修正方差保费原理、指数保费原理、Esscher 保费原理等. 在下面的叙述中,用 $X$、$Y$、$Z \in \chi$ 表示可保风险,用 $\alpha_k$ 表示每一种保费计算原理对应的安全负荷系数.

下面的例子用于比较期望值保费原理、方差保费原理、修正方差保费原理、标准差保费原理的保费计算差异.

**例 1**　假设风险随机变量 $X$ 服从伽马分布 $\mathrm{Gamma}(\alpha,\beta)$,其密度函数为 $f(x) = \beta^{\alpha}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}/\Gamma(\alpha)$, $x>0$. 则得到 $E(X) = \alpha/\beta$, $D(X) = \alpha/\beta^2$. 因此期望值保费原理、方差保费原理、修正方差保费原理、标准差保费原理分别为

$$H_{\alpha_1}(X) = (1+\alpha_1)E(X) = (1+\alpha_1)\alpha/\beta,$$

$$H_{\alpha_2}(X) = E(X) + \alpha_2 D(X) = \alpha/\beta + \alpha_2\alpha/\beta^2,$$

$$H_{\alpha_3}(X) = E(X) + \alpha_3 D(X)/E(X) = (\alpha+\alpha_3)/\beta,$$

$$H_{\alpha_4}(X) = E(X) + \alpha_4\sqrt{D(X)} = \sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha}+\alpha_4)/\beta.$$

对给定的 $\alpha = 2$, $\beta = 4$,表 1 说明了这 4 种保费计算原理与安全负荷系数的关系.

表 1　安全负荷系数对在 4 种保费计算原理中风险保费的计算

| 保费 | 安全负荷系数 | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.8 | 1.5 | 2.0 |
| $H_{\alpha_1}$ | 0.500 | 0.550 | 0.600 | 0.650 | 0.700 | 0.750 | 0.900 | 1.250 | 1.500 |
| $H_{\alpha_2}$ | 0.500 | 0.513 | 0.525 | 0.538 | 0.550 | 0.563 | 0.600 | 0.688 | 0.750 |
| $H_{\alpha_3}$ | 0.500 | 0.525 | 0.550 | 0.575 | 0.600 | 0.625 | 0.700 | 0.875 | 1.000 |
| $H_{\alpha_4}$ | 0.500 | 0.535 | 0.571 | 0.606 | 0.641 | 0.677 | 0.783 | 1.030 | 1.207 |

从表 1 的数值计算可以看出: 在这 4 种保费计算原理中风险保费对安全负荷系数都是递增的,并且它们的关系为 $H_{\alpha_1} > H_{\alpha_4} > H_{\alpha_3} > H_{\alpha_2}$. 在保险公司中,精算师需要根据公司的具体情况选取合适的保费计算原理和安全负荷系数.

荷兰保费原理(Dutch premium principle) 为

$$H_{\alpha_5}(X) = E(X) + \alpha_5 E(X-\theta E(X))_+,$$

其中 $\alpha_5 \in [0,1]$,且 $\theta > 1$, $x_+ = \max\{x,0\}$. 荷兰保费原理是 A. E. van Heerwaarden 等[7] 提出的一种保费计算原理. 他们根据"荷兰保险条约"将风险 $X$ 分解为原保险人部分和再保险人部分,相应地,保费也分成 2 部分,提出了该保费计算原理,并研究了这种保费原理的性质.

显然,以上保费原理的计算仅仅依赖于风险随机变量的前 2 阶矩,而不依赖于风险的具体分布性质. 而指数保费原理、Esscher 保费原理通过定义风险的指数矩得到,分别为

$$H_{\alpha_6}(X) = \ln(E(\mathrm{e}^{\alpha_6 X}))/\alpha_6,\ \text{其中}\ \alpha_6 > 0,$$

$$H_{\alpha_7}(X) = E(X\mathrm{e}^{\alpha_7 X})/(E(\mathrm{e}^{\alpha_7 X})),\ \text{其中}\ \alpha_7 > 0$$ 为已知参数.

容易证明 $\lim_{\alpha_i\to 0^+}H_{\alpha_i}(X) = E(X)$,且当 $\alpha_i > 0$ 时,有 $H_{\alpha_i}(X) > E(X)$, $i = 6,7$. 这说明指数保费原理和 Esscher 保费原理都满足正的负荷性[8-11].

另外,按比例风险调整保费原理与 Kamp 保费计算原理[12-13] 分别为

$H_{\alpha_8}(X)=\int_0^{\infty}(S_X(t))^{1/(\alpha_8+1)}\mathrm{d}t$,其中 $\alpha_8\geqslant 0$,

$H_{\alpha_9}(X)=E(X(1-\mathrm{e}^{-\alpha_9 X}))/E((1-\mathrm{e}^{-\alpha_9 X}))$,其中 $\alpha_9>0$.

取 $\lambda=2.5$,对不同的安全负荷系数 $\alpha_k$,计算这 5 种保费计算原理的保费值(见表 2).

表 2 安全负荷系数对在 5 种保费计算原理中风险保费的计算

| 保费 | 安全负荷系数 | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.8 | 1.5 | 2.0 |
| $H_{\alpha_5}$ | 0.400 | 0.409 | 0.418 | 0.427 | 0.436 | 0.445 | 0.471 | 0.534 | 0.579 |
| $H_{\alpha_6}$ | 0.400 | 0.408 | 0.417 | 0.426 | 0.436 | 0.446 | 0.482 | 0.611 | 0.805 |
| $H_{\alpha_7}$ | 0.400 | 0.417 | 0.435 | 0.455 | 0.476 | 0.500 | 0.588 | 1.000 | 1.000 |
| $H_{\alpha_8}$ | 0.400 | 0.440 | 0.480 | 0.520 | 0.560 | 0.600 | 0.720 | 1.000 | 1.200 |
| $H_{\alpha_9}$ | 0.800 | 0.785 | 0.770 | 0.757 | 0.745 | 0.733 | 0.703 | 0.650 | 0.622 |

从表 2 可以看出:荷兰保费原理、指数保费原理、Esscher 保费原理、按比例风险调整保费原理的风险保费 $H_{\alpha_k}(X)$ 都是安全负荷系数 $\alpha_k$ 的增函数,且 $\lim\limits_{\alpha_k\to 0^+}H_{\alpha_k}(X)=E(X)$,$k=8,9$. 而对 Kamps 保费原理而言,其风险保费是安全负荷系数 $\alpha_k$ 的减函数.在保险精算的实际运用中,精算师需要根据保险公司的财务情况,选取合适的保费计算原理和安全负荷系数.表 3 总结了上述 9 种保费计算原理各自满足的性质.

表 3 各类保费计算原理满足的性质

| 保费原理 | RL | NU | ML | TI | PH | SAd | IAd | CAd | Monotone | FSD | SL | Continuity |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 期望值原理 | Y | N | N | N | Y | Y | Y | Y | Y | Y | Y | Y |
| 方差原理 | Y | Y | N | Y | N | N | Y | N | N | N | N | Y |
| 修正方差 | Y | Y | N | N | Y | N | N | N | N | N | N | Y |
| 标准差原理 | Y | Y | N | Y | Y | N | N | N | N | N | N | Y |
| 荷兰原理 | Y | Y | Y | N | Y | Y | N | N | Y | Y | Y | Y |
| 指数原理 | Y | Y | Y | Y | N | N | Y | N | Y | Y | Y | Y |
| Esscher 原理 | Y | Y | Y | N | N | N | N | N | N | N | N | Y |
| 按比例风险调整 | Y | Y | Y | Y | Y | Y | N | Y | Y | Y | Y | Y |
| Kamps 原理 | Y | Y | Y | N | N | N | N | N | N | N | N | Y |

从表 3 可以看出:每一种保费计算原理满足的性质是不同的.这些保费计算原理是不同时期的精算师和学者在不同的背景下提出的保费定价规则.例如,期望值保费原理、方差保费原理、修正方差保费原理和标准差保费原理都是基于风险的前 2 阶矩的特征给出的,其中风险的数学期望 $E(X)$ 构成了保费的主要部分,而 $D(X)$ 构成了附加保费部分.指数保费原理是根据期望效用理论提出来的,而 Esscher 保费原理是根据随机变量的 Esscher 变换提出的一种保费原理.在实际中,保险公司应根据自身的风险状况、财务能力与保险属性,选用或制定合适的保费计算原理.

## 3 基于风险度量的保费计算原理

保费计算原理 $H(X)$ 可以看成风险 $X$ 的一种度量.在金融风险管理中,P. Artzner 等[14] 首次从公理化的角度提出了一致风险度量的概念,给出了风险度量需要满足的 4 个公理:转移不变性、次可加性、正齐次性(尺度不变性)以及单调性.从这个意义上说,风险度量是保费计算原理的一种推广.在金融风险管理中,常用的风险度量有在险价值度量、条件在险价值度量、尾在险价值度量和期望短缺等.若把这些风险度量看成保费原理的拓展,则有如下几种扩充的保费计算原理.

首先,VaR(Value at Risk)是一种常用的风险度量,它要求给出的度量小于 $X$ 的概率最多不超过某个给定的概率 $\varepsilon$,即 $P(X>H)\leqslant\varepsilon$.在精算实务中,为了提高竞争力,要求保费满足

$$H(X)=\inf\{x\in\mathbf{R}:P(X\leqslant x)\geqslant\gamma\}=F_X^{-1}(\gamma).$$

由上式定义的保费计算原理被称为 VaR 保费原理,记为 $\mathrm{VaR}(X;\gamma)$,其中

$$F_X^{-1}(\gamma)=\inf\{x\in\mathbf{R}:P(X\leqslant x)\geqslant\gamma\}$$

为分布函数 $F_X(x)$ 的广义逆,这里 $\gamma=1-\varepsilon$.由于 $F_X^{-1}(\gamma)$ 为随机变量 $X$ 的 $\gamma$ 分位数,因此也被称为分位数保费原理.

若 $X\leqslant\mathrm{ess\ sup}(X)$,则 $\mathrm{VaR}(X;\gamma)=F_X^{-1}(\gamma)\leqslant\mathrm{ess\ sup}(X)$,即 VaR 保费原理满足极大损失性.由于 $H(c)=\inf\{x\in\mathbf{R}:P(c\leqslant x)\geqslant\gamma\}=c$,所以 VaR 保费原理满足无不当风险附加性.另外,若定义 $\gamma^*=$

$F_X(E(X))$，则当 $\gamma < \gamma^*$ 时，有

$$H(X) = F_X^{-1}(\gamma) \leqslant F_X^{-1}(\gamma^*) = E(X),$$

这说明分位数保费不满足正的安全负荷性.

容易证明，分位数保费满足转移不变性、正齐次性、对共同单调可加性、单调性、保留 1 阶随机控制序、保留停止损失序和连续性等性质. 但作为一种风险度量，VaR 不满足正的安全负荷性和次可加性. 这使得 VaR 度量虽然简单，但不是一致风险度量. 在此基础上，学者提出了一些改进的风险度量.

对给定的大概率 $\gamma$，定义

$$\mathrm{TVaR}(X;\gamma) = \int_\gamma^1 \mathrm{VaR}(X;s)\,\mathrm{d}s/(1-\gamma)$$

为尾部 VaR 保费原理或 TVaR 保费原理. 在金融中，也被称为尾在险价值风险度量.

根据 VaR 的性质，可以证明 TVaR 满足转移不变性、正齐次性、对共同单调可加性、单调性、保留 1 阶随机控制序、保留停止损失序和连续性等性质，更重要的是 TVaR 还满足次可加性，因此是一种一致风险度量[14]. 基于 VaR 度量的保费计算原理还包括条件尾期望(CTE) 保费原理、期望短缺(ES) 保费原理和条件在险价值(CVaR) 保费原理，它们分别为

$$\mathrm{CTE}(X;\gamma) = E(X \mid X > \mathrm{VaR}(X;\gamma)),$$

$$\mathrm{ES}(X;\gamma) = E((X - \mathrm{VaR}(X;\gamma))_+),$$

$$\mathrm{CVaR}(X;\gamma) = E((X - \mathrm{VaR}(X;\gamma)) \mid X > \mathrm{VaR}(X;\gamma)).$$

显然，VaR 保费原理、尾部 VaR 保费原理、条件尾期望保费原理、期望短缺保费原理、条件在险价值保费原理都是基于 VaR 提出的保费计算原理. 下面简单讨论它们之间的关系. 首先，容易得到

$$\mathrm{CVaR}(X;\gamma) = \mathrm{CTE}(X;\gamma) - \mathrm{VaR}(X;\gamma).$$

其次，根据积分变换，得到

$$\mathrm{ES}(X;\gamma) = E((X - \mathrm{VaR}(X;\gamma))_+) = \int_0^1 (\mathrm{VaR}(X;s) - \mathrm{VaR}(X;\gamma))_+\,\mathrm{d}s = \int_\gamma^1 \mathrm{VaR}(X;s)\,\mathrm{d}s - \mathrm{VaR}(X;\gamma)(1-\gamma),$$

则有

$$\mathrm{TVaR}(X;\gamma) = \mathrm{VaR}(X;\gamma) + \mathrm{ES}(X;\gamma)/(1-\gamma).$$

又因为

$$\mathrm{ES}(X;\gamma) = E((X - \mathrm{VaR}(X;\gamma))_+) = E((X - \mathrm{VaR}(X;\gamma)) \mid X > \mathrm{VaR}(X;\gamma))S_X(\mathrm{VaR}(X;\gamma)) = (\mathrm{CTE}(X;\gamma) - \mathrm{VaR}(X;\gamma))S_X(\mathrm{VaR}(X;\gamma)),$$

因此有

$$\mathrm{CTE}(X;\gamma) = \mathrm{VaR}(X;\gamma) + \mathrm{ES}(X;\gamma)/(S_X(\mathrm{VaR}(X;\gamma))),$$

$$\mathrm{CVaR}(X;\gamma) = \mathrm{ES}(X;\gamma)/(S_X(\mathrm{VaR}(X;\gamma))).$$

最后，需要说明的是，当风险 $X$ 为连续型随机变量时，有

$$S_X(\mathrm{VaR}(X;\gamma)) = 1-\gamma,$$

则 $\mathrm{TVaR}(X;\gamma) = \mathrm{CTE}(X;\gamma)$.

为了更进一步说明这几种基于 VaR 的保费计算原理的差别，给出下面的例子.

**例 2**　假设风险 $X$ 服从对数正态分布，密度函数为

$$f(x) = \exp(-(\ln x - \mu)^2/(2\sigma^2))/(\sqrt{2\pi}\sigma x),\ x>0,$$

其中 $\mu \in \mathbf{R}$，$\sigma > 0$ 为参数. 对给定的大概率 $\gamma$，计算 $\mathrm{VaR}(X;\gamma)$、$\mathrm{TVaR}(X;\gamma)$、$\mathrm{CTE}(X;\gamma)$、$\mathrm{ES}(X;\gamma)$ 以及 $\mathrm{CVaR}(X;\gamma)$.

首先，根据对数正态分布的性质，设存在随机变量 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ 使得 $X = \mathrm{e}^Y$，则有

$$P(X \leqslant x) = P(\mathrm{e}^Y \leqslant x) = P(Y \leqslant \ln x) = \Phi((\ln x - \mu)/\sigma),$$

其中 $\Phi(x)$ 表示标准正态分布的分布函数. 令 $\gamma = P(X \leqslant x)$，得到

$$F_X^{-1}(\gamma) = \exp(\mu + \sigma\Phi^{-1}(\gamma)),$$

进而，根据 $\mathrm{TVaR}(X;\gamma)$ 的定义，令 $\Phi(x) = s$，则 $\mathrm{d}s = \varphi(x)\,\mathrm{d}x$，其中 $\varphi(x)$ 是标准正态分布的密度函数. 因此

$$\mathrm{TVaR}(X;\gamma) = \frac{1}{1-\gamma}\int_\gamma^1 \exp(\mu + \sigma\Phi^{-1}(s))\,\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{e}^\mu}{1-\gamma}\int_\gamma^1 (\exp(\Phi^{-1}(s)))^\sigma \mathrm{d}s = \frac{\mathrm{e}^\mu}{1-\gamma}\int_{\Phi^{-1}(\gamma)}^\infty \mathrm{e}^{x\sigma}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^\mu}{1-\gamma}\mathrm{e}^{\sigma^2/2}\int_{\Phi^{-1}(\gamma)-\sigma}^\infty \mathrm{e}^{-t^2/2}/\sqrt{2\pi}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}(1 - \Phi(\Phi^{-1}(\gamma) - \sigma))/(1-\gamma).$$

与此同时，有

$$\mathrm{CTE}(X;\gamma) = E(X \mid X > \mathrm{VaR}(X;\gamma)) = \int_{\mathrm{VaR}(X;\gamma)}^\infty x\,\mathrm{d}F_X(x)/(1-\gamma) = \mathrm{TVaR}(X;\gamma).$$

根据关系式 $\mathrm{TVaR}(X;\gamma) = \mathrm{VaR}(X;\gamma) + \mathrm{ES}(X;\gamma)/(1-\gamma)$，可得

$$\mathrm{ES}(X;\gamma) = \exp(\mu + \sigma^2/2)\Phi(\sigma - \Phi^{-1}(\gamma)) - (1-\gamma)\exp(\mu + \sigma\Phi^{-1}(\gamma)).$$

由 $\mathrm{CVaR}(X;\gamma) = \mathrm{ES}(X;\gamma)/(1 - F_X(\mathrm{VaR}(X;\gamma)))$ 可得

$$\mathrm{CVaR}(X;\gamma) = \exp(\mu + \sigma^2/2)\Phi(\sigma - \Phi^{-1}(\gamma))/(1-\gamma) - \exp(\mu + \sigma\Phi^{-1}(\gamma)).$$

设 $\mu = 3$，$\sigma^2 = 4$，对给定的 $\gamma \in (0,1)$，分别计算 $\mathrm{VaR}(X;\gamma)$、$\mathrm{TVaR}(X;\gamma)$、$\mathrm{ES}(X;\gamma)$ 以及 $\mathrm{CVaR}(X;\gamma)$，得到如图 1 所示的曲线图.

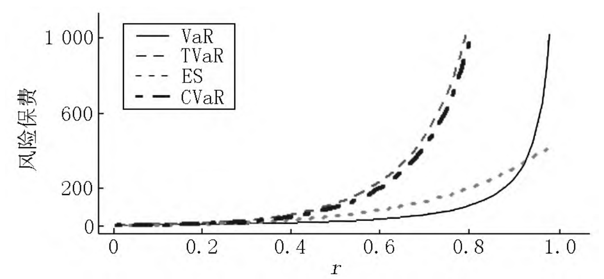



图 1 基于 VaR 提出的各类保费原理的风险保费的曲线图

从图 1 中可以看出:对固定的 $\gamma \in (0,1)$,当 $\gamma$ 较小(小于 0.4)时,这 4 个保费相对比较接近;当 $\gamma$ 较大(大于 0.8)时,保费 $\mathrm{TVaR}(X;\gamma)$ 和 $\mathrm{CVaR}(X;\gamma)$ 远远大于 $\mathrm{ES}(X;\gamma)$ 和 $\mathrm{VaR}(X;\gamma)$.

除了这些具体的保费计算原理,还有一些保费计算原理类.如根据效用理论定义的期望效用保费原理;根据失真期望变换得到的失真保费计算原理;根据广义加权损失函数定义的广义加权保费计算原理等[15-19].

## 4 保费计算原理的比较与最优性分析

在前面的第 2 节和第 3 节中,分别给出了几种常用保费计算原理和基于风险度量的保费计算原理,并比较了这些保费计算原理所满足的性质.在保险实际中,保险公司需要根据自身对风险的态度和财务状况,选取合适的保费计算原理.本节将以期望值保费原理和 VaR 保费原理作为基准,讨论研究各种保费计算原理中的保费估计的最优性问题.

### 4.1 基于数值模拟的常用保费计算原理的比较

为了对这些保费计算原理进行比较,考虑不同的保费计算原理的提出背景和计算方式不同,本节将以期望值保费原理为基准,求解得到其他各种保费计算原理的安全负荷系数.最后,通过数值模拟和 Bootstrap 2 种方法,比较这 9 种保费计算原理的保费估计的方差.

为了方便,将这 9 种保费计算原理的计算公式统一记为 $H_{\alpha_i}(X) = H_i (i = 1,2,\cdots,9)$,并假设在期望值保费原理中的安全负荷系数 $\alpha_1$ 是已知的.令 $H_i = H_1$,则可得到在其他 8 种保费计算原理中的安全负荷系数 $\alpha_i (i = 2,3,\cdots,9)$.

假设风险 $X$ 服从指数分布,参数为 $\lambda$,密度函数为 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$.则有 $E(X) = 1/\lambda, D(X) = 1/\lambda^2$ 以及 $E((X - \theta E(X))_+) = e^{-\theta}/\lambda$.根据例 1 的计算,得到 9 种保费计算原理的定价公式:

$H_2 = (1 + \alpha_2/\lambda)/\lambda, H_3 = H_4 = H_8 = (1 + \alpha_1)/\lambda, H_5 = (1 + \alpha_5 e^{-\theta})/\lambda, H_6 = (\ln(\lambda/(\lambda - \alpha_6))/\alpha_6, H_7 = 1/(\lambda - \alpha_7), H_9 = (2\lambda + \alpha_9)/(\lambda \cdot (\lambda + \alpha_9))$.

令 $H_i = H_1, i = 2,3,\cdots,5$,则可得

$$\alpha_2 = \lambda\alpha_1, \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_1, \alpha_5 = \alpha_1 e^{\theta}.$$

令 $H_6 = H_1$,则 $\alpha_6$ 为方程

$$\lambda \ln(\lambda/(\lambda - \alpha_6)) = (1 + \alpha_1)\alpha_6$$

的解.

最后,令 $H_7 = H_8 = H_9 = H_1$,则有

$$\alpha_7 = \lambda\alpha_1/(1 + \alpha_1), \alpha_8 = \alpha_1, \alpha_9 = \lambda(1 - \alpha_1)/\alpha_1.$$

取 $\lambda = 2, \theta = 1.5$,对不同的 $\alpha_1$ 的值,经过计算得到 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_9$ 的值,画出曲线图 2.由于 $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_8$,所以这 3 条曲线重合.

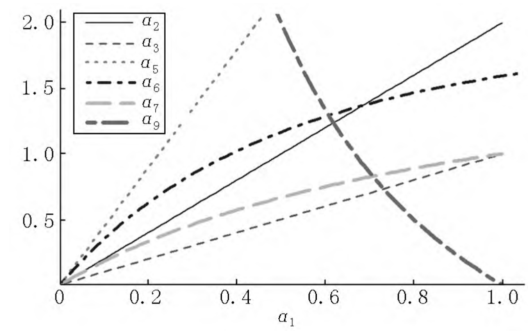



图 2 8 种保费计算原理中 $\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_9$ 对 $\alpha_1$ 的图形

从图 2 中可以看出:除了 Kamps 保费原理外,其他保费计算原理中的安全负荷系数 $\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_8$ 都是 $\alpha_1$ 的增函数,而 $\alpha_9$ 是 $\alpha_1$ 的减函数.取 $\alpha_1 = 0.100\,0$、$0.300\,0$ 和 $0.500\,0$,得到表 4 中的安全负荷系数值.

表 4 各种保费计算原理的安全负荷系数取值

| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$ | $\alpha_6$ | $\alpha_7$ | $\alpha_8$ | $\alpha_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.100 0 | 0.200 0 | 0.100 0 | 0.100 0 | 0.448 2 | 0.352 3 | 0.181 8 | 0.100 0 | 18.000 0 |
| 0.300 0 | 0.600 0 | 0.300 0 | 0.300 0 | 1.344 5 | 0.845 9 | 0.461 5 | 0.300 0 | 4.666 7 |
| 0.500 0 | 1.000 0 | 0.500 0 | 0.500 0 | 2.240 8 | 1.165 6 | 0.666 7 | 0.500 0 | 2.000 0 |

取 $\alpha_1 = 0.100\,0$,模拟产生一组指数分布的样本观测值 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$,得到 $\lambda$ 的估计 $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$,进而得到估计 $\hat{H}_i$.经过 100 000 次重复模拟,得到各种保费原理下保费估计的模拟结果(见表 5).

表5　各种保费计算原理下保费的估计及其标准差

| 统计量 | 保费 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $H_1$ | $H_2$ | $H_3,H_4,H_8$ | $H_5$ | $H_6$ | $H_7$ | $H_9$ |
| 最小值 | 0.077 3 | 0.070 9 | 0.077 3 | 0.077 3 | 0.070 9 | 0.070 9 | 0.109 3 |
| 中位数 | 0.532 9 | 0.514 2 | 0.532 8 | 0.532 9 | 0.512 8 | 0.513 2 | 0.558 5 |
| 均值 | 0.551 4 | 0.536 3 | 0.551 3 | 0.551 4 | 0.535 3 | 0.535 6 | 0.574 7 |
| 最大值 | 1.596 4 | 1.718 9 | 1.596 4 | 1.596 4 | 1.755 0 | 1.743 7 | 1.533 7 |
| 标准差 | 0.174 5 | 0.180 9 | 0.174 5 | 0.174 5 | 0.181 4 | 0.181 6 | 0.162 3 |
| 极差 | 1.519 1 | 1.648 0 | 1.519 1 | 1.519 1 | 1.684 1 | 1.672 8 | 1.424 4 |

根据表5中保费估计的标准差从小到大的原则，大致可以把保费计算原理分成3组:

$\{H_9\},\{H_1,H_3,H_4,H_5,H_8\},\{H_2,H_6,H_7\}$.

这说明标准差最小的是Kamps保费原理，其次是期望值保费原理、标准差保费原理、修正方差保费原理、荷兰保费原理和按比例风险调整保费原理，标准差较大的是方差保费原理、指数保费原理和Esscher保费原理.

## 4.2　基于Bootstrap方法的保费比较

在R语言的程序包“SMPracticals”中，储存了1980—1990年间丹麦火灾保险的损失数据，共有$n=2\ 493$个观测值，由于商业原因，所以软件包中调整了该数据的计量单位. 从R语言中调出名为“danish”的数据集，分别对原始损失数据$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$和对数损失数据$\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$进行描述性统计，得到表6的结果.

原始数据和对数散点图如图3所示.

表6　丹麦火灾保险损失数据的描述性统计

| 数据 | 最小值 | 第一四分位数 | 中位数 | 均值 | 第三四分位数 | 最大值 | 方差 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 原始数据 | 1 | 1.320 | 1.780 | 390 | 970 | 26 250 | 7 380 |
| 对数数据 | 0 | 0.278 | 0.576 | 0.787 | 1.088 | 5.573 | 0.514 |

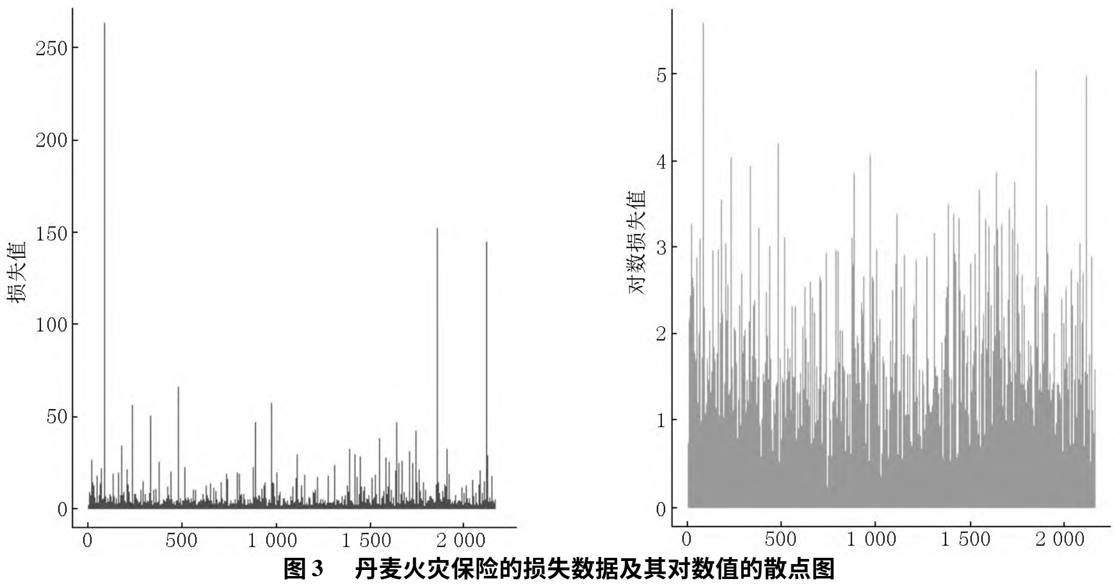
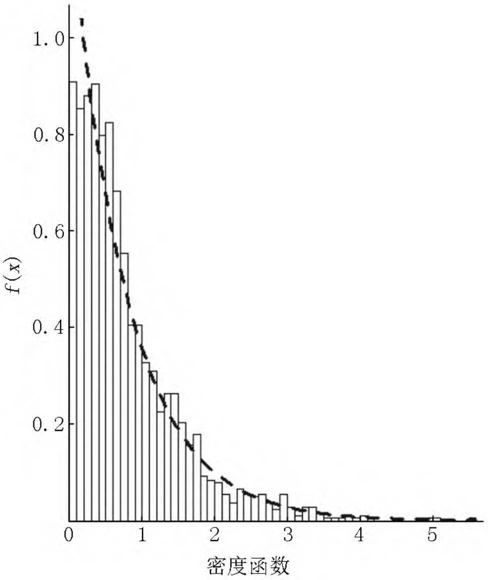


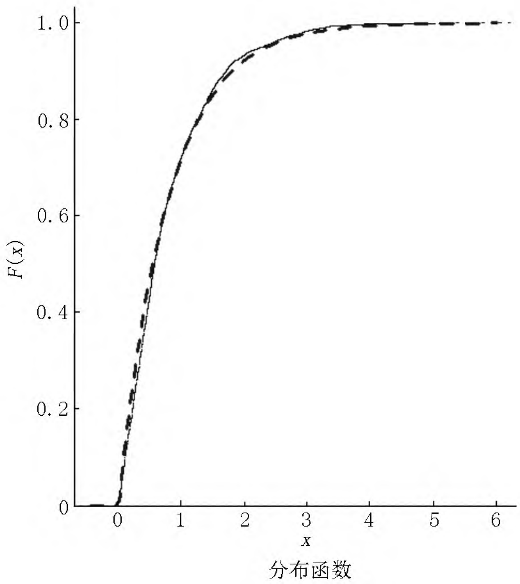

图3　丹麦火灾保险的损失数据及其对数值的散点图

显然，将原始数据作对数变换后，呈现出更好的统计规律性. 用指数分布对变换后的数据的密度函数和分布函数进行拟合，计算得到指数分布中参数的极大似然估计$\hat{\lambda}=1.271$. 其拟合图如图4所示，左图中的直方图为实际数据经对数变换后的直方图，虚线曲线为指数分布的密度函数的拟合曲线. 右图中的实线曲线为实际数据经对数变换后的经验分布函数图形，虚线曲线为指数分布的分布函数的拟合曲线. 从图4可以看出指数分布的拟合效果非常好.

当$\alpha_1=0.1,\theta=1.5,\lambda=1.271$时，令$H_i=H_1(i=2,3,\cdots,9)$，可以得到除期望值保费原理以外的其他8种保费计算原理的安全负荷系数值(见表7).




(a) 密度函数




(b) 分布函数

图4 丹麦火灾保险的损失数据对数值的拟合图

表7 丹麦火灾数据在各种保费计算原理中的安全负荷系数值

| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$ | $\alpha_6$ | $\alpha_7$ | $\alpha_8$ | $\alpha_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.100 0 | 0.127 1 | 0.100 0 | 0.100 0 | 0.448 2 | 0.223 9 | 0.155 0 | 0.100 0 | 11.439 0 |

把数据$\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$看作样本,则$F_n(y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I(y_i\leqslant y)$为$\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$的经验分布函数.在这9种保费原理的计算中,利用$F_n(y)$替换$F_Y(y)$,得到在各种保费计算原理中风险保费的矩估计.例如,指数保费原理和按比例风险调整保费原理的保费估计分别为

$$\hat{H}_6=\frac{1}{\alpha_6}\left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\alpha_6 y}\mathrm{d}F_n(y)\right)=\frac{1}{\alpha_6}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\alpha_6 y_i}\right),$$

$$\hat{H}_8=\int_0^{\infty}(1-F_n(y))^{1/(1+\alpha_8)}\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{n}(1-(i-1)/n)^{1/(1+\alpha_8)}(y_{(i)}-y_{(i-1)}),$$

其中$y_{(i)}$为$\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$的第$i$个次序统计量,且$y_{(0)}=0$.

利用重抽样技术(Bootstrap)对$\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$进行10 000次重抽样,分别得到在各种保费计算原理中保费的估计值,相应的描述性统计如表8所示.

表8 在各种保费计算原理中保费的估计值及其标准差

| 统计量 | 保费 | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ | $H_5$ | $H_6$ | $H_7$ | $H_8$ | $H_9$ |
| 最小值 | 0.806 5 | 0.792 3 | 0.795 9 | 0.801 8 | 0.797 9 | 0.791 0 | 0.848 1 | 0.801 3 | 0.792 5 |
| 中位数 | 0.865 4 | 0.851 9 | 0.851 9 | 0.858 4 | 0.855 6 | 0.850 0 | 0.920 2 | 0.857 8 | 0.848 4 |
| 均值 | 0.865 5 | 0.852 1 | 0.852 1 | 0.858 4 | 0.855 7 | 0.850 2 | 0.920 3 | 0.857 9 | 0.848 5 |
| 最大值 | 0.926 6 | 0.917 1 | 0.912 2 | 0.918 8 | 0.917 4 | 0.915 2 | 1.001 0 | 0.918 1 | 0.907 6 |
| 标准差 | 0.130 3 | 0.134 4 | 0.129 6 | 0.129 8 | 0.130 1 | 0.134 7 | 0.147 3 | 0.129 7 | 0.125 4 |
| 极差 | 0.120 1 | 0.124 8 | 0.116 3 | 0.117 0 | 0.119 5 | 0.124 2 | 0.152 9 | 0.116 8 | 0.115 1 |

从表8可以看出:在丹麦火灾保险数据中,标准差最小的是Kamps保费原理,标准差从小到大的顺序依次为修正方差保费原理、按比例风险调整保费原理、标准差保费原理、荷兰保费原理和期望值保费原理,标准差较大的有方差保费原理和指数保费原理,标准差最大的是Esscher保费原理.这与表5中得到的结论基本一致.同时结果显示这9种常用的保费计算原理的估计的标准差均较小.

### 4.3 基于VaR的各类保费计算原理的比较

在险价值度量(VaR)是风险度量的重要方法.它给出了在一定置信水平下风险可能发生的最大损失.但由于VaR不满足一致性风险度量的次可加性[20],因此在实际使用中受到很大的限制.为了改进这个缺点,研究者相继提出TVaR、CTE、ES、CVaR等.相应地,若把风险度量作为一种保费原理,则就有VaR、TVaR、CTE、ES、CVaR等保费计算原理.

本节将以 VaR 为基准,在平衡原则下分别计算这些保费原理中保费估计的标准差并进行比较.

假设风险 $X$ 服从帕累托分布,其分布函数为

$$F_X(x) = 1-(\beta/(\beta+x))^{\theta}, x>0,$$

其中 $\beta>0, \theta>0$ 为参数. 取定 $\gamma_1$,可得到

$$\mathrm{VaR}(X;\gamma_1) = \beta((1-\gamma_1)^{-1/\theta}-1).$$

同时,根据 TVaR 的定义,有

$$\mathrm{TVaR}(X;\gamma_2) = \frac{1}{1-\gamma_2}\int_{\gamma_2}^{1}\beta((1-s)^{-1/\theta}-1)\,\mathrm{d}s = \beta((1-\gamma_2)^{-1/\theta}-1)+\beta(1-\gamma_2)^{-1/\theta}/(\theta-1) = \beta\theta\cdot(1-\gamma_2)^{-1/\theta}/(\theta-1)-\beta = \mathrm{CTE}(X;\gamma_2).$$

进而得到

$$\mathrm{ES}(X;\gamma_4) = E((X-\mathrm{VaR}(X;\gamma_4))_+) = \beta(1-\gamma_4)^{(\theta-1)/\theta}/(\theta-1),$$

$$\mathrm{CVaR}(X;\gamma_5) = \mathrm{ES}(X;\gamma_5)/(1-F_X(\mathrm{VaR}(X;\gamma_5))) = \beta(1-\gamma_5)^{-1/\theta}/(\theta-1).$$

令 $\mathrm{VaR}(X;\gamma_1) = \mathrm{TVaR}(X;\gamma_2) = \mathrm{CTE}(X;\gamma_3) = \mathrm{ES}(X;\gamma_4) = \mathrm{CVaR}(X;\gamma_5)$,得到

$$\gamma_2 = \gamma_3 = 1-(1-\gamma_1)(\theta/(\theta-1))^{\theta},$$

$$\gamma_4 = 1-((\theta-1)((1-\gamma_1)^{-1/\theta}-1))^{\theta/(\theta-1)},$$

$$\gamma_5 = 1-((\theta-1)((1-\gamma_1)^{-1/\theta}-1))^{-\theta}.$$

注意到,上面几个式子都与 $\beta$ 取值无关. 取 $\theta=2$,对不同的 $\gamma_1$ 值,分别得到 $\gamma_2$、$\gamma_3$、$\gamma_4$、$\gamma_5$ 的值(见表 9).

**表 9　基于 VaR 的各类保费计算原理的 $\gamma$ 值的比较**

| 系数 | $\gamma_1$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.900 0 | 0.910 0 | 0.920 0 | 0.930 0 | 0.940 0 | 0.950 0 | 0.960 0 | 0.970 0 | 0.980 0 | 0.990 0 |
| $\gamma_2$ | 0.600 0 | 0.640 0 | 0.680 0 | 0.720 0 | 0.760 0 | 0.800 0 | 0.840 0 | 0.880 0 | 0.920 0 | 0.960 0 |
| $\gamma_3$ | 0.600 0 | 0.640 0 | 0.680 0 | 0.720 0 | 0.760 0 | 0.800 0 | 0.840 0 | 0.880 0 | 0.920 0 | 0.960 0 |
| $\gamma_4$ | −3.675 4 | −4.444 0 | −5.428 0 | −6.726 4 | −8.501 7 | −11.055 0 | −15.000 0 | −21.780 0 | −35.850 0 | −80.000 0 |
| $\gamma_5$ | 0.786 1 | 0.816 3 | 0.844 5 | 0.870 6 | 0.894 8 | 0.917 1 | 0.937 5 | 0.956 1 | 0.972 9 | 0.987 7 |

显然,从表 9 的结果可以看出,期望短缺保费原理的 $\gamma_4$ 没有意义. 这显示在 VaR 和 ES 2 种风险度量中的置信水平不在一个度量单位上,且 $\gamma_2$、$\gamma_3$ 与 $\gamma_5$ 都是关于 $\gamma_1$ 的增函数. 取 $\gamma_1=0.950\,0$,则 $\gamma_2=\gamma_3=0.800\,0$,$\gamma_5=0.917\,1$. 设 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是总体的样本观测值,利用经验分布函数 $F_n(x)$ 替换总体分布函数 $F_X(x)$,得到各类保费计算原理的保费估计. 在100 000 次重复模拟下,计算保费估计的最小值、最大值、均值、中位数、标准差等,得到如表 10 所示的结果.

**表 10　基于 VaR 的各类保费计算原理的保费估计的标准差比较**

| 统计量 | 保费原理 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | VaR | TVaR | CTE | ES | CVaR |
| 最小值 | 1.221 | 1.185 | 1.185 | 0.205 | 0.201 |
| 中位数 | 633 | 146 | 146 | 0.600 | 6 696 |
| 均值 | 852 | 443 | 443 | 0.659 | 4 689 |
| 最大值 | 17.345 | 200.973 | 200.973 | 40.212 | 497.180 |
| 标准差 | 1.208 | 1.700 | 1.700 | 0.336 | 9 574 |
| 极差 | 16.124 | 199.788 | 199.788 | 40.008 | 496.979 |

从表 10 的结果分析,ES 保费原理的保费估计的标准差最小,其他保费计算原理的保费估计的标准差从小到大的顺序依次是 VaR 保费原理、TVaR 保费原理、CTE 保费原理、CVaR 保费原理. 与前面 9 种常用保费原理不同,基于 VaR 的各类保费原理的保费估计的标准差波动都比较大,且与在 VaR 取值相等时的 ES 的置信度系数 $\gamma_4$ 均为负值,在实际中没有意义. 同时,VaR 保费原理不能满足次可加性. 因此,在实际使用时推荐选用 TVaR 保费原理和 CTE 保费原理.

## 5 总结

本文详细介绍了保费计算原理的性质,对在非寿险精算中常用的保费计算原理进行了综述,并分析了各种保费计算原理满足的性质. 同时根据保费估计的方差最小原则和 Bootstrap 抽样方法探讨了各种保费计算原理的最优性. 保费计算原理的选取是非寿险保险公司的重要内容,同时也是非寿险精算学研究的热门课题. 著名精算学者 H. Bühlmann、H. U. Gerber 和 V. R. Young 等都对各种保费计算原理进行过探索和分析[3,5,17]. 近年来,更多学者探讨了给定保费计算原理中风险保费的统计推断问题[18-25].

## 6 参考文献

[1] ASMUSSEN S, ALBRECHER H. Ruin probabilities [M]. Singapore: World Scientific, 2010.

[2] 韩天雄. 非寿险精算[M]. 北京: 中国财政经济出版社,2010.
[3] BÜHLMANN H. Mathematical methods in risk theory[M]. Berlin: Springer-Verlag,1970.
[4] KAAS R,GOOVAERTS M,DHAENE J,et al. Modern actuarial risk theory[M]. 2nd ed. New York: Kluwer Academic Publishers,2008.
[5] YOUNG V R. Premium principles[M]//TEUGELS J L,SUNDT B,WILLMOT G E,et al. Encyclopedia of actuarial science. New York: John Wiley & Sons,2004: 1322-1331.
[6] 温利民,张林娜,张美,等. 方差相关保费原理下风险保费的非参数估计[J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2015,39(4): 355-359.
[7] VAN HEERWAARDEN A E,KAAS R. The Dutch premium principle[J]. Insurance: Mathematics and Economics,1992,11(2): 129-133.
[8] NEEDHAM T A. Visual explanation of Jensen's inequality[J]. The American Mathematical Monthly,1993,100(8): 768-771.
[9] ESSCHER F. On the probability function in the collective theory of risk[J]. Skandinavisk Aktuarietidskrift,1932,15(3): 175-195.
[10] PRATSIOVYTYI M,DROZDENKO V O. Limit behavior of the Esscher premium[J]. Random Operators and Stochastic Equations,2016,24(2): 143-146.
[11] DENUIT M. The exponential premium calculation principle revisited[J]. ASTIN Bulletin: the Journal of the IAA,1999,29(2): 215-226.
[12] 章溢,李志龙,龚海林,等. 失真风险保费的最优经验厘定[J]. 应用数学学报,2019,42(6): 761-778.
[13] KAMPS U. On a class of premium principles including the Esscher principle[J]. Scandinavian Actuarial Journal,1998,1998(1): 75-80.
[14] ARTZNER P,DELBAEN F,EBER J M,et al. Coherent measures of risk[J]. Mathematical Finance,1999,9(3): 203-228.
[15] 温利民,庄小红. 零期望效用原理下的贝叶斯保费[J]. 系统科学与数学,2016,36(8): 1318-1328.
[16] 王丙参,魏艳华,戴宁. 期望效用理论与保险[J]. 河北北方学院学报(自然科学版),2012,28(1): 55-58.
[17] 温利民,梅国平. 新型广义加权保费原理下风险保费的信度估计[J]. 应用数学学报,2013,36(2): 257-268.
[18] 张强,吴黎军. 广义加权平衡指数损失函数下的信度保费[J]. 统计与决策,2013,29(1): 89-91.
[19] GERBER H U. Credibility for Esscher premium[J]. Mitleilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungs Mathematiker,1980,80(3): 307-312.
[20] CHEN Yongzhao,CHEUNG K C,CHOI H M C,et al. Evolutionary credibility risk premium[J]. Insurance: Mathematics and Economics,2020,93: 216-229.
[21] 章溢,熊佳,温利民,等. 基于核估计下概率密度函数的信度模型[J]. 高校应用数学学报 A 辑,2020,35(1): 29-39.
[22] 章溢,曾剑锋,温利民. 方差保费原理中风险保费的近似信度估计[J]. 统计与决策,2019,35(19): 74-78.
[23] 章溢,李志龙,温利民. 矩相关保费原理中风险保费的经验厘定[J]. 中国科学: 数学,2019,49(7): 1041-1062.
[24] 章溢,郑丹,温利民. 相依风险模型下风险保费的信度估计[J]. 系统科学与数学,2017,37(2): 516-527.
[25] JEONG H,VALDEZ E A. Bayesian credibility premium with GB2 copulas[J]. Dependence Modeling,2020,8(1): 157-171.

# The Comparison and Optimality Analysis of Insurance Premium Calculation Principles

ZHANG Yi
(School of Finance,Jiangxi Normal University,Nanchang Jiangxi 330022,China)

**Abstract:** The principle of premium calculation is the theoretical basis for insurance companies to price premiums. For non-life insurance companies,the selection of premium principles plays a vital role. According to the properties needed to satisfy of the principle of premium calculation,this article reviews and compares the theories and practical applications of the premium calculation principle commonly used in non-life insurance. Based on the standard deviation criterion,the optimality of various premium calculation principles is analyzed. Finally,the Bootstrap method is used to resample the Danish fire insurance loss data,and the optimality of the insurance premium principle is verified again based on the resampled data.

**Key words:** premium calculation principle; risk measurement; optimality; Bootstrap; VaR

(责任编辑: 曾剑锋)