李春华,郑淑寒,方洁莹,等.弱左型 B 半群的真覆盖[J].江西师范大学学报(自然科学版),2023,47(2):183-186.
LI Chunhua,ZHENG Shuhan,Fang Jieying,et al. The proper cover of a weakly left type B semigroup[J]. Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science),2023,47(2):183-186.

文章编号:1000-5862(2023)02-0183-04

弱左型 B 半群的真覆盖

李春华,郑淑寒,方洁莹,孟令香
(华东交通大学理学院,江西 南昌 330013)

摘要:弱型 B 半群是在半富足半群范围内的广义逆半群.该文利用弱左型 B 半群真覆盖的定义,给出了弱左型 B 半群真覆盖的相关性质.特别地,得到了相应于弱左型 B 半群作用在幂单幺半群上的真覆盖的结构定理.

关键词:弱左型 B 半群;真覆盖;E-酉的;幂单幺半群
中图分类号:O 152.7　**文献标志码:**A　**DOI:**10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2023.02.10

0　引言

近年来,越来越多的学者开始关注广义正则半群的研究.一般而言,可以通过广义格林关系对广义正则半群进行讨论和研究. J. Fountain[1]引入了富足半群概念,自此,以格林 *-关系满足一定条件的各种广义正则半群的研究引起了国内外学者的关注[2-12]. M. V. Lawson[13]定义了格林 ~ 关系.令 S 为半群,并且 $\forall a,b\in S$,

$$a\widetilde{\mathscr{L}}b\Leftrightarrow((\forall e\in E)ae=a\Leftrightarrow be=b),a\widetilde{\mathscr{R}}b\Leftrightarrow((\forall e\in E)ea=a\Leftrightarrow eb=b),\widetilde{\mathscr{H}}=\widetilde{\mathscr{L}}\wedge\widetilde{\mathscr{R}},$$

其中 $E(S)$ 为 S 的幂等元集合. M. V. Lawson[13]提出了一类广义的富足半群,即半富足半群.称半群 S 为半富足的,若 S 的每个 $\widetilde{\mathscr{L}}$ 类和 $\widetilde{\mathscr{R}}$ 类都包含幂等元.特别地,若在半群 S 中每个 $\widetilde{\mathscr{R}}$ 类都包含幂等元,则称 S 为左半富足半群.若左半富足半群 S 的幂等元可交换,则称 S 为左半适当半群.左半适当半群被称为弱左型 B 半群,若下列条件成立:

(WB1) $\widetilde{\mathscr{R}}$ 是左同余;

(WB2) $(\forall e,f\in E(S^1),a\in S)(aef)^+=(ae)^+(af)^+$;

(WB3) $(\forall e\in E(S),a\in S)e\leqslant a^+\Leftrightarrow(\exists f\in E(S^1))e=(af)^+$.

易知,在 S 的每个 $\widetilde{\mathscr{R}}$ 类中幂等元是唯一的,故 $\forall a\in S$,记 a^+ 是与 a 具有格林关系 $\widetilde{\mathscr{R}}$ 的唯一幂等元.

G. M. S. Gomes 等[14]研究了有限半群类的有限真覆盖. 2006 年,J. Fountain 等[15]研究了在 ample 幺半群上的真覆盖,同时也得到了任意 ample 幺半群都存在 ample 真覆盖.在此基础上,文献[16]进一步研究了在型 B 半群上的真覆盖并且得到了一些结果.众所周知,弱型 B 半群是在半富足半群上广义的型 B 半群,基于此,本文研究了弱左型 B 半群的真覆盖,并得到一些结论.

1　预备知识

引理 1[1]　令 S 是半群,$a,b\in S$,则以下条件等价:

1) $a\widetilde{\mathscr{R}}b$;2) $(\forall e\in E(S))ea=a\Leftrightarrow eb=b$.

引理 2[1]　令 S 是任意半群,$a\in S,e\in E(S)$,则以下条件等价:

1) $a\widetilde{\mathscr{R}}e$;

收稿日期:2022-11-10
资助项目:国家自然科学基金(11261018;11961026),江西省自然科学基金(20181BAB201002)和江西省教育厅科学技术研究课题(GJJ2200634)资助项目.
作者简介:李春华(1973—),男,江西宜丰人,教授,博士,主要从事半群代数理论的研究. E-mail:chunhuali66@163.com

2)$a = ea$ 且 $\forall f \in E(S)$,$a = fa$ 蕴含 $e = fe$.

格林关系 $\widetilde{\mathscr{R}}$ 是广义的 $\mathscr{R}^*$ 关系. 在半群 S 中的元素 a,b,$a\widetilde{\mathscr{R}}b$ 当且仅当 a 和 b 有相同的幂等左恒等元. 显然,在任意半群中有 $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{R}^* \subseteq \widetilde{\mathscr{R}}$,在正则半群中有 $\mathscr{R} = \mathscr{R}^* = \widetilde{\mathscr{R}}$. 在半群 S 中,格林关系 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}^*$ 都是左同余,但 $\widetilde{\mathscr{R}}$ 不一定是左同余.

定义1[6] 令 S 是弱左型B半群,按如下定义 S 的关系 σ:$(a,b) \in \sigma \Leftrightarrow (\exists e \in E(S))ae = be$.

引理3[6] 若 S 为真的弱左型B半群,则 σ 为在 S 上的最小幂单同余.

定义2[6] 令 S 是任意弱左型B半群,则称 S 为真的,若 $\sigma \cap \widetilde{\mathscr{R}} = \iota_S$,其中 ι_S 为在 S 中的恒等关系.

下面给出一个弱左型 B 半群的例子.

例1 令 $S = \{(x)_{2\times2} \mid x \in \mathbf{N}\} \cup \{(1/2)_{2\times2}\}$,其中 $\mathbf{N}$ 为非负整数,$(y)_{2\times2}$ 是 2×2 的矩阵 $\begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix}$,这里 $y \in \{\mathbf{N}\} \cup \{1/2\}$. 显然,关于一般矩阵的乘法,$S$ 是半富足半群,且

$$E(S) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\right\}.$$

事实上,显然 S 的 $\widetilde{\mathscr{R}}$ 类分别是 $S/\{(0)_{2\times2}\}$ 和 $\{(0)_{2\times2}\}$. 另外,$E(S)$ 是半格,并且 $\forall a \in \mathbf{N}, a \neq 0$,有 $(a)^+_{2\times2} = (1/2)_{2\times2}$. 因此,根据左弱型B半群的定义容易得出 S 是弱左型B半群.

定义3[13] 令 φ 为半群 S 到另一半群 T 的同态,若 $\forall a,b \in S$,$\varphi(a) = \varphi(b)$ 蕴含 $a\widetilde{\mathscr{R}}(S)b$,则称 φ 为 $\widetilde{\mathscr{R}}$ 同态.

定义4 令 S 为弱左型B半群,T 为真的弱左型B半群. 称 T 为相应于 S 的真覆盖,若 φ 为 T 到 S 的 $\widetilde{\mathscr{R}}$ 同态,且 $\forall e \in E(S)$,$\exists f \in E(T)$,使得 $e = \varphi(f)$.

定义5 令 T 为真的弱左型B半群,若 T 为相应于弱左型B半群 S 的真覆盖,M 是幂单幺半群并且 $T/\sigma \cong M$,则称 T 为相应于 S 作用在 M 上的真覆盖.

定义6[17] 令 S 是任意半群,则称 S 为 E- 酉的,若 $\forall a \in S, e \in E(S)$ 使得 $ae \in E(S)$,蕴含 $a \in E(S)$.

引理4 令 S 是真弱左型B半群,则 S 是 E- 酉的.

证 令 $e \in E(S)$,$a \in S$,使得 $ae \in E(S)$,则

$$a(eae) = ae = a^+ae = a^+aee = a^+(eae),$$

即 $a(eae) = a^+(eae)$,其中 $(eae) \in E(S)$,由 σ 的定义可知 $(a,a^+) \in \sigma$. 于是,$a(\sigma \cap \widetilde{\mathscr{R}})a^+$,由于 S 是真弱左型B半群,故 $a = a^+ \in E(S)$,即 S 是 E- 酉的.

2 主要结论

定义7 令 S 为真的弱左型B半群,M 为包含恒等元1的幂单幺半群,映射 $\theta: M \to P(S)$,其中 $P(S)$ 为 S 的子集族. 称 θ 是全满的,若下列条件成立:

(F1)$(\forall m \in M)\theta(m) \neq \varnothing$;

(F2)$(\forall m,n \in M)\theta(m)\theta(n) \subseteq \theta(mn)$;

(F3)$\bigcup_{m\in M}\theta(m) = S$;

(F4)$\theta(1) = E(S)$;

(F5)$(\forall m \in M)\left|\widetilde{\mathscr{R}}_a \cap \theta(m)\right| \leqslant 1$;

(F6)$(\forall m \in M, a \in \theta(m))\theta(m) \subseteq \sigma_a$.

定理1 令 S 为真的弱左型 B 半群,M 为包含恒等元1的幂单幺半群,映射 $\theta: M \to P(S)$,其中 $P(S)$ 为 S 的子集族. 假设 $T = \{(s,m) \in S \times M \mid s \in \theta(m)\}$,如下定义在 T 中的运算:

$(\forall s_1,s_2 \in S, m_1,m_2 \in M)(s_1,m_1)(s_2,m_2) = (s_1s_2, m_1m_2)$.

显然,T 是半群. 若 θ 是全满的,则下列结论成立:

1)$E(T) = \{(e,1) \mid e \in E(S)\} \cong E(S)$;

2)$(\forall a,b \in S, g,h \in M)(a,g)\widetilde{\mathscr{R}}(T)(b,h) \Leftrightarrow a\widetilde{\mathscr{R}}(S)b$;

3)T 为弱左型 B 半群;

4)$(\forall (a,g),(b,h) \in T)(a,g)\sigma(b,h) \Leftrightarrow a\sigma_S b$,$g = h$.

证 1)令 $T = \{(s,m) \in S \times M \mid s \in \theta(m)\}$,由定义7的(F4)可知,$E(T) = \{(e,1) \mid e \in E(S)\}$. 显然,$E(S) \cong E(T)$.

2)令 $(a,g),(b,h) \in T$ 并且 $(a,g)\widetilde{\mathscr{R}}(b,h)$. 首先,令 $\forall (f,1) \in E(T)$,若 $(f,1)(a,g) = (a,g)$,则 $(fa,g) = (a,g)$,即 $fa = a$. 由于 S 是弱左型B半群,故 $fa^+ = a^+$,于是,$(f,1)(a^+,1) = (fa^+,1) = (a^+,1)$. 又因为 $(a,g) = (a^+,1)(a,g)$,因此,$(a,g)\widetilde{\mathscr{R}}(T)(a^+,1)$. 同理可知,$(b,h)\widetilde{\mathscr{R}}(T)(b^+,1)$. 于是,$(a^+,1)\widetilde{\mathscr{R}}(T)(b^+,1)$. 进而,$(a^+,1) = (b^+,1)(a^+,1) = (b^+a^+,1)$,$(b^+,1) = (a^+,1)(b^+,1) = (a^+b^+,1)$,即 $a^+ = b^+a^+$,$b^+ = a^+b^+$,故 $a^+\mathscr{R}b^+$. 于是,$a\widetilde{\mathscr{R}}(S)b$. 反之,显然成立.

3)由上述1)、2)可知,T 是左半富足半群并且 $E(T)$ 是半格,故 T 是半适当半群. 下面证明 T 满足

条件(WB1). 令 $\forall(a,g),(b,h)\in T$ 并且 $(a,g)\widetilde{\mathscr{R}}(b,h)$. 由2)可知,$a\widetilde{\mathscr{R}}(S)b$. 由于 S 是弱左型 B 半群,所以 $\forall(c,k)\in T$,有 $ca\widetilde{\mathscr{R}}(S)cb$. 根据结论2)的充分性可知,$(ca,kg)\widetilde{\mathscr{R}}(cb,kh)$,即 $(c,k)(a,g)\widetilde{\mathscr{R}}(c,k)(b,h)$. 因此,在 T 中 $\widetilde{\mathscr{R}}$ 关系是左同余.

接下来证明 T 满足条件(WB2). 令 $(e,1),(f,1)\in E(T^1)$,$(a,h)\in T$,其中 $e,f\in E(S^1)$. 由于 S 是弱左型 B 半群,故

$$((a,h)(e,1)(f,1))^+=(aef,1)^+=((aef)^+,1)=((ae)^+(af)^+,1)=((ae)^+,1)((af)^+,1)=(ae,h)^+(af,h)^+=((a,h)(e,1))^+((a,h)(f,1))^+.$$

因此,条件(WB2)成立.

最后,证明 T 满足条件(WB3). 令 $(e,1)\in E(T^1)$,$(a,h)\in T$,其中 $e\in E(S^1)$ 并且 $(e,1)\leqslant(a,h)^+$,即 $(e,1)\leqslant(a^+,1)$. 于是,$(e,1)=(a^+,1)(e,1)=(a^+e,1)$,即 $e=a^+e=ea^+$. 因此 $e\leqslant a^+$. 由于 S 是弱左型 B 半群,故 $\exists f\in E(S^1)$,使得 $e=(af)^+$. 因此,

$$(e,1)=((af)^+,1)=(af,h)^+=((a,h)(f,1))^+,$$

其中 $(f,1)\in E(T^1)$. 综上所述,T 是弱左型 B 半群.

4) 令 $\forall(a,g),(b,h)\in T$ 并且满足 $(a,g)\sigma(b,h)$,则 $\exists e\in E(S)$,使得 $(a,g)(e,1)=(b,h)(e,1)$,即 $(ae,g)=(be,h)$. 于是,$ae=be$ 并且 $g=h$. 因此,$a\sigma_S b,g=h$. 充分性显然成立.

综上所述,定理 1 得证.

定理2　令 S 是真弱左型 B 半群,M 为包含恒等元1的幂单幺半群,θ 为 M 到 $P(S)$ 的全满映射,其中 $P(S)$ 是 S 的子集族. 令 $T=\{(s,m)\in S\times M\mid s\in\theta(m)\}$,则 T 为相应于 S 作用在 M 上的真覆盖. 反之,任意相应于 S 作用在 M 上的真覆盖都可以按上述构造.

证　首先,由定理1可知,T 是弱左型 B 半群. 令 $(a,g),(b,h)\in T$,并且满足 $(a,g)(\widetilde{\mathscr{R}}(T)\cap\sigma(T))(b,h)$. 由定理1的2)和4)可知 $a\widetilde{\mathscr{R}}(S)b,g=h$. 故 $a,b\in\theta(g)$. 由于 θ 是全满映射,所以根据条件(F5),显然,$a=b$,即 $(a,g)=(b,h)$. 故 $\widetilde{\mathscr{R}}(T)\cap\sigma(T)=\iota_T$. 因此,$T$ 是真弱左型 B 半群.

定义映射 $\varphi:T\to S,(a,g)\mapsto a$. 显然,$\varphi$ 是好定义并且是满同态. 令 $\varphi((a,g))=\varphi((b,h))$,即 $a=b$. 显然,$a\widetilde{\mathscr{R}}(S)b$,于是,$\varphi$ 为 $\widetilde{\mathscr{R}}$ 同态. 令 $\forall e\in E(S)$,$\exists(c,k)\in T$,使得 $\varphi(c,k)=e$,即 $e=c\in\theta(k)$. 由于 θ 是全满映射,所以由条件(F4)可得 $k=1$. 故 $(c,k)=(e,1)\in E(T)$. 因此,T 为相应于 S 的真覆盖.

下证 T 为相应于 S 作用在 M 上的真覆盖. 定义映射 $\alpha:T/\sigma\to M$,$(a,g)\sigma\mapsto g$,且 $(a,g)\sigma,(b,h)\sigma\in T/\sigma$ 和 $(a,g)\sigma=(b,h)\sigma$,则 $(a,g)\sigma(b,h)$. 由定理1的4)可知,$a\sigma_S b,g=h$,故 α 是好定义. 再令 $\forall(a,g)\sigma,(b,h)\sigma\in T/\sigma$,并且 $\alpha((a,g)\sigma)=\alpha((b,h)\sigma)$,故 $g=h$. 于是,$a,b\in\theta(g)$. 由于 θ 是全满映射,所以由条件(F6)可得 $a\sigma_S b$. 又由定理1的4)可知 $(a,g)\sigma(b,h)$,即 $(a,g)\sigma=(b,h)\sigma$. 因此,α 是单射. 显然,α 又是满射. 另外,$\forall(a,g)\sigma,(b,h)\sigma\in T/\sigma$,有

$$\alpha((a,g)\sigma(b,h)\sigma)=\alpha((ab,gh)\sigma)=gh=\alpha((a,g)\sigma)\alpha((b,h)\sigma).$$

因此,α 是同构,即 T 为相应于 S 作用在 M 上的真覆盖.

反之,令 φ 是弱左型B半群 T 到 S 的 $\widetilde{\mathscr{R}}$ 同态,并且 φ 满足幂等元提升($\forall e\in E(S)$,$\exists f\in E(T)$ 使得 $e=\varphi(f)$). 取 $M=T/\sigma(T)$,则 T 为相应于 S 作用在 M 上的真覆盖. 定义映射 θ 为

$$\theta:M\to P(S),g\mapsto\theta(g),(\forall g\in M)\theta(g)=\{s\in S\mid(\exists t\in T)s=t\varphi,t\sigma(T)=g\}.$$

下证 θ 是全满映射,并且 $T\trianglelefteq T'$,其中 $T'=\{(s,g)\in S\times M\mid s\in\theta(g)\}$.

首先,$\forall g\in M$,由自然同态 $\sigma^{\#}:T\to T/\sigma=M$ 是满射可知 $\theta(g)\neq\varnothing$,条件(F1)成立. 令 $g,h\in M$,$s_1\in\theta(g)$ 并且 $s_2\in\theta(h)$. 故 $\exists u,v\in T$,使得 $s_1=u\varphi,u\sigma=g,s_2=v\varphi,v\sigma=h$. 于是,$s_1s_2=(uv)\varphi$,$(uv)\sigma=gh$. 因此,$\theta(g)\theta(h)\subseteq\theta(gh)$,即条件(F2)成立. 显然,$\bigcup_{g\in M}\theta(g)=S$,故条件(F3)成立. 又令 $s\in\theta(1)$. 则 $\exists t\in T$,使得 $s=t\varphi,t\sigma=1$. 由于 $t^+\sigma=1$,所以,$t(\widetilde{\mathscr{R}}\cap\sigma)t^+$. 由于 T 是真弱左型B半群,故 $t=t^+\in E(S)$,即 $\theta(1)\subseteq E(S)$. 另外,令 $e\in E(S)$,则 $\exists f\in E(T)$,使得 $e=f\varphi$,且 $f\sigma=1$,于是,$e\in\theta(1)$,即 $E(S)\subseteq\theta(1)$,因此,条件(F4)成立.

下证 $T\trianglelefteq T'$. 建立映射 $\varphi:T\to T',t\mapsto(t\varphi,t\sigma)$. 显然,$\varphi$ 是满同态. $\forall t,u\in T$,并且 $(t\varphi,t\sigma)=(u\varphi,u\sigma)$,则 $t\varphi=u\varphi,t\sigma=u\sigma$. 又由于 φ 是 $\widetilde{\mathscr{R}}$ 同态,所以 $t\widetilde{\mathscr{R}}(T)u$,即 $t(\widetilde{\mathscr{R}}(T)\cap\sigma(T))u$. 由于 T 是真弱左型B半群,故 $t=u$,即 $T\trianglelefteq T'$. 显然,T' 是真弱左型 B 半

群. 现证θ满足条件(F5). 令$s,s_1 \in \theta(g)$并且$s\widetilde{\mathscr{R}}s_1$,故$(s,g),(s_1,g) \in T'$,由定理1可知$(s,g)\widetilde{\mathscr{R}}(T')(s_1,g)'$. 由上述证明可知$T \unlhd T'$,于是,$\exists t,t_1 \in T$,使得$\varphi(t) = (t\varphi,t\sigma) = (s,g),\varphi(t_1) = (t_1\varphi,t_1\sigma) = (s_1,g)$. 故$t\sigma(T)t_1$. 由$\sigma$定义可得$\exists e \in E(T)$,使得$te = t_1e$. 从而$((s,g))(\varphi(e)) = \varphi(t)\varphi(e) = \varphi(te) = \varphi(t_1e) = \varphi(t_1)\varphi(e) = ((s_1,g))(\varphi(e))$. 于是,$(s_1,g)\sigma(T')(s,g)$,即$(s_1,g)(\widetilde{\mathscr{R}}(T') \cap \sigma(T'))(s,g)$. 由于$T'$是真弱左型$B$半群,所以$(s_1,g) = (s,g)$,即$s_1 = s$. 因此,条件(F5)成立.

最后,令$s,t \in \theta(m)$,其中$s,t \in S,m \in M$,则$(s,m),(t,m) \in T'$,进而,由定义7的(F5)可得$(s,m)\sigma(T')(t,m)$,又由定理1的4)可知$s\sigma_S t$. 因此,条件(F6)成立,即θ是全满映射.

3 参考文献

[1] FOUNTAIN J. Abundant semigroups [J]. Proceedings of the London Mathematical Society,1982,44(1):103-129.

[2] GUO Junying,GUO Xiaojiang. Self-injectivity of semigroup algebra [J]. Open Mathematics,2020,18(1):333-352.

[3] GUO Junying,GUO Xiaojiang. Semiprimeness of semigroup algebra [J]. Open Mathematics,2021,19(1):803-832.

[4] GOMES G M S,GOULD V. Proper weakly left ample semigroup [J]. International Journal of Algebra and Computation,1999,9(6):721-739.

[5] GOULD V,HOLLINGS C. Partial actions of inverse and weakly left E-ample semigroups [J]. Journal of the Australian Mathematical Society,2009,86(3):355-377.

[6] 李春华,徐保根,黄华伟. 真弱左型 B 半群上的幂单同余 [J]. 山东大学学报(理学版),2016,51(8):49-52.

[7] LI Chunhua,WANG Limin,XU Baogen. An automorphism theorem on certain type B semigroups [J]. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics,2019,42:616-623.

[8] LI Chunhua,XU Baogen,HUANG Huawei. Bipolar fuzzy abundant semigroups with applications [J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems,2020,39(1):167-176.

[9] LI Chunhua,XU Baogen, HUANG Huawei. Cayley graphs over Green* relations of abundant semigroups [J]. Graphs and Combinatorics,2019,35(6):1609-1617.

[10] LI Chunhua,XU Baogen. A characterization of translational hulls of a strongly right type B semigroup [J]. Open Mathematics,2019,17(1):1340-1349.

[11] LI Chunhua,FANG Jieying,MENG Lingxiang,et al. Almost factorizable weakly type B semigroups [J]. Open Mathematics,2021,19(1):1721-1735.

[12] LI Chunhua,WANG Limin. On the translational hull of a type B semigroup [J]. Semigroup Forum,2011,82(3):516-529.

[13] LAWSON M V. Rees matrix semigroups [J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society,1990,33(1):23-27.

[14] GOMES G M S,GOULD V. Finite proper covers in a class of finite semigroups with commuting idempotents [J]. Semigroup Forum,2003,66(3):433-454.

[15] FOUNTAIN J, GOMES G M S. Proper covers of ample monoids [J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society,2006,49(2):277-289.

[16] 李春华,汪立民. 关于右型 B 半群的真覆盖 [J]. 华南师范大学学报(自然科学版),2012,44(1):54-57.

[17] HOWIE J M. An introduction to semigroup theory [M]. New York:Academic Press,1976.

The Proper Cover of a Weakly Left Type B Semigroup

LI Chunhua,ZHENG Shuhan,FANG Jieying,MENG Lingxiang

(School of Science,East China Jiaotong University,Nanchang Jinagxi 330013,China)

Abstract:Weakly type B semigroups are generalized inverse semigroups in the rage of semi-abundant semigroups. Some properties of a proper cover of a weakly left type B semigroup are given by using the definition of the proper cover of a weakly left type B semigroup. In particular, some structure theorems corresponding to the proper cover of a weakly left type B semigroup acting on a unipotent monoid are obtained.

Key words:weakly type B semigroup;proper cover;E-unitary;unipotent monoid

(责任编辑:曾剑锋)