龙沁怡,徐丽平. 基于上记录值 Lomax 分布的统计推断[J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2023,47(2):216-220.
LONG Qinyi,XU Liping. The statistical inference for Lomax distribution based on upper record values[J]. Journal of Jiangxi Normal University (Natural Science),2023,47(2):216-220.

文章编号:1000-5862(2023)02-0216-05

基于上记录值 Lomax 分布的统计推断

龙沁怡,徐丽平*
(长江大学信息与数学学院,湖北 荆州　434023)

摘要:基于上记录值,该文讨论了在 Lomax 分布总体中未知参数、系统可靠度及失效率的极大似然估计,并利用中心极限定理得到了模型参数的近似置信区间. 首先,当 2 个参数的先验分布为混合分布时,在 2 种损失函数下计算了未知参数及可靠性指标的 Bayes 估计,并给出了超参数的估计方法;然后,分别用频率方法和 Bayes 方法对未来的上记录值进行预测;最后,提出了一种模拟上记录值的算法,利用模拟的记录值计算了相关的结果.

关键词:Lomax 分布;上记录值;先验分布;Bayes 估计
中图分类号:O 213.2　**文献标志码**:A　**DOI**:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2023.02.15

0 引言

两参数 Lomax 分布的密度函数为

$$f(x;\theta,\lambda) = \theta\lambda(1+\lambda x)^{-(\theta+1)}, x>0, \theta>0, \lambda>0, \quad (1)$$

其分布函数为

$$F(x;\theta,\lambda) = 1-(1+\lambda x)^{-\theta}, x>0, \theta>0, \lambda>0, \quad (2)$$

根据式(1)和式(2),则可靠度函数 $R(t)$ 和失效率函数 $h(t)$ 分别为

$$R(t) = (1+\lambda t)^{-\theta},\ t>0,$$

$$h(t) = \theta\lambda/(1+\lambda t), t>0.$$

假设某种部件的寿命服从两参数 Lomax 分布(1),根据文献[1]可知,由 m 个相互独立的部件构成的串联系统可靠度为

$$R_s(t,m) = (1+\lambda t)^{-m\theta}, t>0,$$

由 m 个相互独立的部件构成并联系统可靠度为

$$R_p(t,m) = \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}C_m^j(1+\lambda t)^{-j\theta}, t>0,$$

当 $m=1$ 时上述可靠度就是单个部件的可靠度.

Lomax 分布也被称为 Ⅱ 型 Pareto 分布,它是一种重尾概率分布,常常被用于商业、经济和精算建模. 该分布受到了统计学家的关注,主要原因是:它在可靠性和寿命测试研究中有着广泛的应用,特别地,当数据为重尾分布时,使用此分布可能更加合适. 文献[2-4]用 E-Bayes 方法讨论了形状参数的估计和 E-Bayes 估计的性质. 文献[5]用 Fiducial 方法研究了未知参数的估计,并与频率方法、Bayes 方法进行比较. 文献[6-7]使用无信息先验分布讨论了 Lomax 分布的 Bayes 推断问题.

假设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自某连续型分布的独立同分布随机变量,若观测值 X_j 比以前的观测值都更大,则它被称为一个上记录值. 记录时间 $U(n)$ 和记录值 X_n 具有如下的关系式:

$$U(1)=1, U(n+1)=\min\{j:j>U(n), X_j>X_{U(n)}\}.$$

设 n 个上记录统计量 $X_{U(1)}=x_1, X_{U(2)}=x_2, \cdots, X_{U(n)}=x_n$ 来自 Lomax 分布(1),根据文献[1]可以得到其似然函数为

$$L(\theta,\lambda\mid\underline{\boldsymbol{x}}) = f(x_n;\theta,\lambda)\prod_{i=1}^{n-1}(f(x_i;\theta,\lambda)/(1-F(x_i;\theta,\lambda))), \quad (3)$$

其中 $\underline{\boldsymbol{x}}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 把式(1)和式(2)代入式(3)可以得到

收稿日期:2022-06-17
基金项目:国家自然科学基金(11901058)资助项目.
通信作者:徐丽平(1980—),女,山东聊城人,副教授,博士,主要从事概率统计的研究. E-mail:xlp211@126.com

$$L(\theta,\lambda\mid\underline{\boldsymbol{x}}) = \theta^n\lambda^n(1+\lambda x_n)^{-\theta}\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda x_i)^{-1}. \quad (4)$$

记录值是一种特殊的次序统计量，其大小由观测值和出现顺序决定. 记录值在工程、寿命试验、体育、经济等领域的应用中都具有重要意义. 在过去的20年里，人们对记录值的兴趣越来越大，它们的性质被广泛研究. 文献[8-11]基于记录值样本进行了统计分析，并给出了未来记录值的预测值. 文献[12]基于逐次定数截尾和记录值样本讨论了 Kumaraswamy 分布的参数估计问题. 文献[13-15]基于记录值采用 Bayes 方法对多种分布总体模型进行了统计分析. 目前关于 Lomax 分布模型的许多研究成果都是假设 λ 已知、θ 未知，其原因是：对于多参数分布模型，若将未知参数的先验分布都取为连续型，则可能会遇到复杂的多重积分，通常只能采用模拟的方法计算其近似值.

本文将 Lomax 分布的参数 λ、θ 的先验分布分别取为离散型分布和连续型分布，即混合先验分布，可以得到一个封闭形式的 Bayes 估计，这在利用先验信息的情况下是可取的. 目前，基于记录值样本及混合先验分布，利用 Bayes 方法对 Lomax 分布的参数和可靠性指标进行统计推断的文献还鲜有报道. 因此，本文将分别用频率方法和 Bayes 方法讨论 Lomax 分布的估计及预测问题.

1　频率估计

1.1　点估计

根据式(4)，对数似然函数为

$$\ln L(\theta,\lambda\mid\underline{\boldsymbol{x}}) = n\ln\theta + n\ln\lambda - \theta\ln(1+\lambda x_n) - \sum_{i=1}^{n}\ln(1+\lambda x_i),$$

对 $\ln L(\theta,\lambda\mid\underline{\boldsymbol{x}})$ 求关于 θ、λ 的1阶偏导数，可以得到似然方程：

$$\begin{cases} n/\theta - \ln(1+\lambda x_n) = 0, \\ n/\lambda - \theta x_n/(1+\lambda x_n) - \sum_{i=1}^{n}(x_i/(1+\lambda x_i)) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

方程组(5)没有显式解，可以用数学软件求其数值解，此解就是 θ、λ 的极大似然估计，分别记为 $\hat{\theta}$ 和 $\hat{\lambda}$.

根据极大似然估计的不变性，可得 $R_s(t,m)$、$R_p(t,m)$ 及 $h(t)$ 的极大似然估计分别为

$$\hat{R}_s(t,m) = (1+\hat{\lambda}t)^{-m\hat{\theta}},$$

$$\hat{R}_p(t,m) = \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}C_m^j(1+\hat{\lambda}t)^{-j\hat{\theta}},$$

$$\hat{h}(t) = \hat{\theta}\hat{\lambda}/(1+\hat{\lambda}t).$$

1.2　近似区间估计

由对数似然函数可以得到2阶导数：

$$\partial^2\ln L(\theta,\lambda\mid\underline{\boldsymbol{x}})/\partial\theta^2 = -n/\theta^2,$$

$$\partial^2\ln L(\theta,\lambda\mid\underline{\boldsymbol{x}})/\partial\lambda^2 = -n/\lambda^2 + \theta x_n^2/(1+\lambda x_n)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2/(1+\lambda x_i)^2),$$

$$\partial^2\ln L(\theta,\lambda\mid\underline{\boldsymbol{x}})/(\partial\theta\partial\lambda) = -x_n/(1+\lambda x_n).$$

由极大似然估计的中心极限定理得 (θ,λ) 的近似分布为 $(\hat{\theta},\hat{\lambda}) \sim N((\theta,\lambda),\boldsymbol{I}^{-1}(\hat{\theta},\hat{\lambda}))$，其中

$$\boldsymbol{I}(\hat{\theta},\hat{\lambda}) = -\begin{pmatrix} \partial^2\ln L(\theta,\lambda\mid\underline{\boldsymbol{x}})/\partial\theta^2 & \partial^2\ln L(\theta,\lambda\mid\underline{\boldsymbol{x}})/(\partial\theta\partial\lambda) \\ \partial^2\ln L(\theta,\lambda\mid\underline{\boldsymbol{x}})/(\partial\theta\partial\lambda) & \partial^2\ln L(\theta,\lambda\mid\underline{\boldsymbol{x}})/\partial\lambda^2 \end{pmatrix}_{(\hat{\theta},\hat{\lambda})}.$$

当 $0<\alpha<1$ 时，θ 和 λ 的 $100(1-\alpha)\%$ 近似置信区间分别为 $(\hat{\theta}-z_{\alpha/2}\sqrt{I_{11}},\hat{\theta}+z_{\alpha/2}\sqrt{I_{11}})$ 和 $(\hat{\lambda}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{I_{22}},\hat{\lambda}+z_{\alpha/2}\sqrt{I_{22}})$，其中 I_{11} 和 I_{22} 是 $\boldsymbol{I}^{-1}(\hat{\theta},\hat{\lambda})$ 的主对角线上的元素，$z_{\alpha/2}$ 是标准正态分布的上 $\alpha/2$ 分位数.

2　Bayes 估计

接下来将用 Bayes 方法对相关问题进行统计分析. 假设2个参数都是未知的，且是离散型和连续型分布的混合形式. 随着科学技术的进步，产品具有长寿命和高可靠性的特点，这可能导致实际的失效数据较少. 因此，根据历史信息和专家经验，混合先验分布可能比在实轴上的连续型先验分布更好.

假设 λ 的分布为离散先验分布，且 θ 的分布为连续的条件先验分布，即 λ 的分布列为

$$P(\lambda=\lambda_k) = \eta_k, k=1,2,\cdots,N,$$

其中 $\eta_k>0$，且满足 $\sum_{k=1}^{N}\eta_k=1$，对于给定的 λ_k，参数 θ 的条件先验分布为

$$\pi(\theta\mid\lambda_k) = a_k e^{-a_k\theta}, a_k>0, \lambda_k>0, \theta>0, \quad (6)$$

其中 $a_k(k=1,2,\cdots,N)$ 是超参数.

根据式(4)和式(6)，对于给定的 λ_k，可得 θ 的条件后验密度函数为

$$\pi(\theta\mid\lambda_k,\underline{\boldsymbol{x}}) = \pi(\theta\mid\lambda_k)L(\theta,\lambda_k\mid\underline{\boldsymbol{x}})/\int_0^{\infty}\pi(\theta\mid\lambda_k)L(\theta,\lambda_k\mid\underline{\boldsymbol{x}})d\theta = (a_k+\ln(1+\lambda_k x_n))^{n+1}\theta^n e^{-\theta(a_k+\ln(1+\lambda_k x_n))}/\Gamma(n+1).$$

(θ,λ) 的联合后验密度函数为

$$\pi(\theta,\lambda_k \mid \underline{x}) = P(\lambda=\lambda_k)\pi(\theta\mid\lambda_k)L(\theta,\lambda_k\mid \underline{x})/\sum_{k=1}^{N}\int_0^{\infty}P(\lambda=\lambda_k)\pi(\theta\mid\lambda_k)L(\theta,\lambda_k\mid\underline{x})\mathrm{d}\theta = \eta_k a_k\theta^n\lambda_k^n\mathrm{e}^{-\theta(a_k+\ln(1+\lambda_k x_n))}\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_k x_i)^{-1}/(\Gamma(n+1)\cdot\sum_{k=1}^{N}\eta_k a_k\lambda_k^n(a_k+\ln(1+\lambda_k x_n))^{-(n+1)}\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_k x_i)^{-1}).$$

λ 的边缘后验分布为

$$P_k = P(\lambda=\lambda_k\mid\underline{x}) = \int_0^{\infty}\pi(\theta,\lambda_k\mid\underline{x})\mathrm{d}\theta = \eta_k a_k\lambda_k^n(a_k+\ln(1+\lambda_k x_n))^{-(n+1)}\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_k x_i)^{-1}/\sum_{k=1}^{N}(\eta_k a_k\lambda_k^n(a_k+\ln(1+\lambda_k x_n))^{-(n+1)}\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_k x_i)^{-1}).$$

平方误差损失函数是一种常用的对称损失函数[16],它被定义为 $L_1(\varphi(\beta),\delta)=(\delta-\varphi(\beta))^2$,其中 δ 是 $\varphi(\beta)$ 的一个估计. 由于在此类损失函数下的 Bayes 估计是后验期望,因此,在平方误差损失函数下,可以计算得到 θ、λ、$R_s(t,m)$、$R_p(t,m)$ 及 $h(t)$ 的 Bayes 估计分别为

$$\hat{\theta}_1 = (n+1)\sum_{k=1}^{N}(P_k/(a_k+\ln(1+\lambda_k x_n))),$$

$$\hat{\lambda}_1 = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k P_k,$$

$$\hat{R}_{s1}(t,m) = \sum_{k=1}^{N}(P_k(a_k+\ln(1+\lambda_k x_n))^{n+1}/(a_k+\ln(1+\lambda_k x_n)+m\ln(1+\lambda_k t))^{n+1}),$$

$$\hat{R}_{p1}(t,m) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{m}((-1)^{j-1}C_m^j P_k(a_k+\ln(1+\lambda_k x_n))^{n+1}/(a_k+\ln(1+\lambda_k x_n)+j\ln(1+\lambda_k t))^{n+1}),$$

$$\hat{h}_1(t) = (n+1)\sum_{k=1}^{N}(P_k\lambda_k/((1+\lambda_k t)(a_k+\ln(1+\lambda_k x_n)))).$$

下面给出了另一种常用的损失函数,即平衡平方误差损失函数,它被定义为

$$L_2(\varphi(\beta),\delta) = \omega(\delta-\delta_0)^2+(1-\omega)(\delta-\varphi(\beta))^2,$$

其中 $0\leqslant\omega<1$.

在平衡平方误差损失函数下,$\varphi(\beta)$ 的 Bayes 估计为

$$\hat{\varphi} = \omega\delta_0+(1-\omega)E_{\varphi}(\varphi(\beta)\mid\underline{x}),$$

其中 $E_{\varphi}(\cdot)$ 表示根据 $\varphi(\beta)$ 的后验密度函数求得的后验期望.

若将 δ_0 取为 $\varphi(\beta)$ 的极大似然估计,则在平衡平方误差损失函数下,θ、λ、$R_s(t,m)$、$R_p(t,m)$ 及 $h(t)$ 的 Bayes 估计分别为

$$\hat{\theta}_2 = \omega\hat{\theta}+(1-\omega)\hat{\theta}_1,\ \hat{\lambda}_2 = \omega\hat{\lambda}+(1-\omega)\hat{\lambda}_1,$$

$$\hat{R}_{s2}(t,m) = \omega\hat{R}_s(t,m)+(1-\omega)\hat{R}_{s1}(t,m),$$

$$\hat{R}_{p2}(t,m) = \omega\hat{R}_p(t,m)+(1-\omega)\hat{R}_{p1}(t,m),$$

$$\hat{h}_2(t) = \omega\hat{h}(t)+(1-\omega)\hat{h}_1(t).$$

一般地,要事先确定 λ_k、η_k 及 a_k 的值. λ_k 和 η_k 的值可以通过先验信息确定,而 a_k 的值比较难确定. 下面给出用样本信息确定 a_k 的方法.

当得到参数 θ 和 λ 的极大似然估计 $\hat{\theta}$ 和 $\hat{\lambda}$ 后,可以进一步得到可靠度函数 $R(t)$ 的极大似然估计为

$$\hat{R}(t) = (1+\hat{\lambda}t)^{-\hat{\theta}}.$$

由先验分布(6)可得 $R(t)$ 的数学期望为

$$E(R(t)) = \int_0^{\infty}R(t)\pi(\theta\mid\lambda_k)\mathrm{d}\theta = a_k\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\theta(a_k+\ln(1+\lambda_k t))}\mathrm{d}\theta = a_k/(a_k+\ln(1+\lambda_k t)).$$

令 $E(R(t))=\hat{R}(t)$,则可得

$$a_k/(a_k+\ln(1+\lambda_k t)) = (1+\hat{\lambda}t)^{-\hat{\theta}}.$$

若记 a_k 的估计为 $\hat{a}_k$,则

$$\hat{a}_k = (\ln(1+\lambda_k t))/((1+\hat{\lambda}t)^{\hat{\theta}}-1),k=1,2,\cdots,N.$$

3 未来上记录值的预测

引理 1[8] 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是分布函数 $F_{\theta}(x)$ 的前 n 个上记录值,对于所有的 $\theta\in\Theta$,分布函数 $F_{\theta}(x)$ 是连续且严格递增的,当 $s>n+1$ 时,若表示上记录值 X_s 的预测值为 $x_P^{(s)}$,则

$$x_P^{(s)} = F_{\theta}^{-1}(1-(1-F_{\theta}(x_n))^{(s-1)/n}).$$

由引理 1 知,对于 Lomax 分布(1),X_s 的预测值为

$$x_P^{(s)} = ((1+\lambda x_n)^{(s-1)/n}-1)/\lambda.$$

根据极大似然估计的不变性,可得 X_s 的极大似然预测值为

$$x_{\mathrm{MOLP}}^{(s)} = ((1+\hat{\lambda}x_n)^{(s-1)/n}-1)/\hat{\lambda}.$$

在平方误差损失函数下,X_s 的 Bayes 预测值为

$$x_{\mathrm{BP}}^{(s)} = \sum_{k=1}^{N}(P_k((1+\lambda_k x_n)^{(s-1)/n}-1)/\lambda_k);$$

在平衡平方误差损失函数下,X_s 的 Bayes 预测值为

$$x_{\mathrm{BBP}}^{(s)} = \omega x_{\mathrm{MOLP}}^{(s)}+(1-\omega)x_{\mathrm{BP}}^{(s)} = \omega((1+\hat{\lambda}x_n)^{(s-1)/n}-1)/\hat{\lambda}+(1-\omega)\sum_{k=1}^{N}(P_k((1+\lambda_k x_n)^{(s-1)/n}-1)/\lambda_k).$$

4　数值例子

下面通过蒙特卡罗模拟产生出Lomax分布的上记录值[14],具体步骤如下:

Step 1　产生独立同分布于均匀分布 $U(0,1)$ 的样本 $U_1,U_1,\cdots,U_n$;

Step 2　设 $Y_i = -\ln(1-U_i), i=1,2,\cdots,n$;

Step 3　设 $Z_i = Y_1+Y_2+\cdots+Y_i, i=1,2,\cdots,n$;

Step 4　计算 $W_i = 1-\mathrm{e}^{-Z_i}, i=1,2,\cdots,n$;

Step 5　对于任意的连续型分布函数 $F(x)$,记 $X_i = F^{-1}(W_i)$,则 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 就是来自总体分布 $F(x)$ 的上记录值,其中 $F^{-1}(\cdot)$ 表示 $F(\cdot)$ 的反函数.

利用上面描述的算法,当 $\theta=2,\lambda=4,n=5$ 时,可以模拟出 Lomax 分布的上记录值:

0.276 3,0.299 8,0.498 1,1.097 2,2.478 4.

基于模拟出的记录值,给定 λ 的先验分布可以得到 $\hat{a}_k$ 和 $P_k(k=1,2,\cdots,N)$ 值,相关的结果被列于表 1 中. 参数、系统可靠度及失效率的估计被列于表 2 中,当 $\theta=2,\lambda=4,t=0.2$ 和 $m=3$ 时,可以计算出 $R_s(t,m)$、$R_p(t,m)$ 和 $h(t)$ 的真值,它们分别为 0.029 4、0.669 5、4.444 4. 通过比较可以发现,相关指标的 Bayes 估计比极大似然估计更接近其真值. 表 3 给出了未来上记录值的预测, 可以发现 Bayes 预测值大于极大似然预测值.

表 1　先验信息和后验概率($t=0.2$)

参数	k 的值				
	1	2	3	4	5
λ_k	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4
η_k	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
$\hat{a}_k$	0.394 7	0.411 4	0.427 8	0.443 8	0.459 4
P_k	0.142 9	0.169 0	0.197 6	0.228 6	0.261 9

表 2　参数及可靠性指标的估计($t=0.2,m=3,\omega=0.2$)

损失函数	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{R}_s(t,m)$	$\hat{R}_p(t,m)$	$\hat{h}(t)$
极大似然估计	3.128 1	1.591 8	0.074 7	0.806 1	3.776 9
平方误差损失	2.117 3	4.059 5	0.053 7	0.644 6	4.737 2
平衡平方误差损失	2.319 5	3.566 0	0.057 9	0.676 9	4.545 1

表 3　未来记录值的预测($\omega=0.2$)

预测值	s 的值				
	7	8	9	10	11
$x_{\mathrm{MOLP}}^{(s)}$	3.648 6	5.259 7	7.477 6	10.530 9	14.734 4
$x_{\mathrm{BP}}^{(s)}$	4.159 1	6.877 1	11.273 3	18.385 3	29.892 3
$x_{\mathrm{BBP}}^{(s)}$	4.057 0	6.553 6	10.514 2	16.814 4	26.860 7

5　结论

本文在上记录值样本下讨论了两参数Lomax分布的统计推断,并利用极大似然估计的渐近正态性得到了未知参数的近似置信区间. 当 2 个参数的先验分布分别取为离散型分布和连续型分布时,计算了未知参数、系统可靠度及部件失效率的极大似然估计和 Bayes 估计. 通过与真值进行比较发现 Bayes 估计比极大似然估计更接近真值. 最后对未来的上记录值分别用极大似然法和 Bayes 方法进行预测,其中在平衡平方误差损失函数下,X_s 的 Bayes 预测值是 $x_{\mathrm{MOLP}}^{(s)}$ 与 $x_{\mathrm{BP}}^{(s)}$ 的一种加权平均值,与 ω 的取值有很大关系. 利用数值例子进一步验证了本文的结论. 在本文的基础上可以尝试把 2 个未知参数的先验分布都取为离散型分布, 这将会得到一些新的结论.

6　参考文献

[1] PIRIAEI H, YARI G, FARNOOSH R. E-Bayesian estimations for the cumulative hazard rate and mean residual life based on exponential distribution and record data [J]. Journal of Statistical Computation and Simulation, 2020, 90(2):271-290.

[2] OKASHA H M. E-Bayesian estimation for the Lomax distribution based on type-II censored data [J]. Journal of the Egyptian Mathematical Society, 2014, 22(3):489-495.

[3] AL-BOSSLY A. E-Bayesian and Bayesian estimation for the Lomax distribution under weighted composite LINEX loss function [J]. Computational Intelligence & Neuroscience, 2021, 2021:2101972.

[4] LIU Kaiwei, ZHANG Yuxuan. The E-Bayesian estimation for Lomax distribution based on generalized type-I hybrid

censoring scheme [J]. Mathematical Problems in Engineering,2021,2021:5570320.

[5] LIANG Yan,GENG Juan,WANG Lijun,et al. Generalized fiducial inference for the Lomax distribution [J]. Journal of Statistical Computation and Simulation,2021,91(12):2402-2413.

[6] FERREIRA P H,RAMOS E,RAMOS P L,et al. Objective Bayesian analysis for the Lomax distribution [J]. Statistics & Probability Letters,2020,159:108677.

[7] HE Daojiang,SUN Dongchu,ZHU Qing. Bayesian analysis for the Lomax model using noninformative priors [J]. Statistical Theory and Related Fields,2023,7(1):61-68.

[8] VOLOVSKIY G,KAMPS U. Maximum observed likelihood prediction of future record values [J]. Test,2020,29(4):1072-1097.

[9] VOLOVSKIY G,KAMPS U. Maximum product of spacings prediction of future record values [J]. Metrika,2020,83(7):853-868.

[10] SANA S C, FAIZAN M. Bayesian estimation using Lindley's approximation and prediction of generalized exponential distribution based on lower record values [J]. Journal of Statistics Applications & Probability,2021,10(1):61-75.

[11] LEE Jeongwook,SONG Joonjin,KIM Yongku, et al. Estimation and prediction of record values using pivotal quantities and copulas [J]. Mathematics,2020,8(10):1678.

[12] PANAHI H. Interval Estimation of Kumaraswamy parameters based on progressively type-II censored sample and record values [J]. Miskolc Mathematical Notes,2020,21(1):319-334.

[13] GUO Baocai,ZHU Naifan, WANG Wei,et al. Constructing exact tolerance intervals for the exponential distribution based on record values [J]. Quality and Reliability Engineering International,2020,36(7):2398-2410.

[14] WANG Ling,SHI Yimin,YAN Weian. Inference for Gompertz distribution under records [J]. Journal of Systems Engineering and Electronics,2016,27(1):271-278.

[15] KIZILASLAN F. E-Bayesian estimation for the proportional hazard rate model based on record values [J]. Communications in Statistics: Simulation and Computation,2019,48(2):350-371.

[16] 邓严林. 双边定数截尾下 Topp-Leone 分布的 Bayes 估计与预测 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2021,45(3):272-277.

The Statistical Inference for Lomax Distribution Based on Upper Record Values

LONG Qinyi,XU Liping*

(School of Information and Mathematics,Yangtze University,Jingzhou Hubei 434023,China)

Abstract:Based on the upper recorded values,the maximum likelihood estimates of the unknown parameters,system reliability and failure rate for Lomax distribution population are discussed. The approximate confidence intervals of the model parameters are obtained by using the central limit theorem. When the prior distributions of the two parameters are taken as a mixed distribution,the Bayesian estimates of the unknown parameters and reliability indexes are calculated under two loss functions,and the estimation approach of the hyperparameters is given. Frequentist method and Bayesian method are used to predict the future upper recorded values,respectively. Finally,the algorithm for simulating the upper record values is proposed,and the relevant results are calculated by using the simulated record values.

Key words:Lomax distribution;upper record values;prior distribution;Bayesian estimation

(责任编辑:曾剑锋)