张梦蝶,刘雨喆,章超. Gentle 代数的矩阵模型及其整体维数[J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2023,47(3):280-286.
ZHANG Mengdie, LIU Yuzhe, ZHANG Chao. The matrix model of Gentle algebra and the global dimension[J]. Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science),2023,47(3):280-286.

文章编号:1000-5862(2023)03-0280-07

Gentle 代数的矩阵模型及其整体维数

张梦蝶[1],刘雨喆[2],章　超[1]*
(1. 贵州大学数学与统计学院,贵州 贵阳 550025;2. 南京大学数学系,江苏 南京 210093)

摘要:该文利用 Gentle 代数的矩阵模型刻画了 Gentle 代数上的单模和投射模,给出了单模的投射分解的矩阵表示. 由此指出 Gentle 代数的整体维数可以由它的矩阵模型所诱导的一类特殊子矩阵序列进行刻画. 并进一步指出这一类特殊子矩阵序列对应于 Gentle 代数的箭图上的极大非平凡 Forbidden 路,从而得到 Gentle 代数的整体维数等于它的箭图上的极大非平凡 Forbidden 路的长度.

关键词:投射模;投射分解;同调维数;矩阵表示;箭图表示
中图分类号:O 151.21;O 154.2　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2023.03.08

0　引言

Gentle 代数由文献[1]引入,最初用于研究 $\widetilde{A}_n$ 型代数上的倾斜代数,并建立相应的导出等价分类. Gentle 代数与许多重要代数有着密切联系,如双列代数(biserial algebra)、特殊双列代数(special biserial algebra)、弦代数(string algebra)、Skew-Gentle 代数等. 早在 1985 年,B. Wald 等[2]就利用箭图表示对双列代数进行了分类,M. C. R. Butler 等[3]在 1987 年利用箭图表示进一步地分类了弦代数上的不可分解模. Gentle 代数上的不可分解模之间的态射的研究则分别由文献[4-5]给出. 由此 Gentle 代数的模范畴可以通过箭图表示完全刻画. Gentle 代数的模范畴的几何刻画由文献[6]给出,其将 Gentle 代数上的不可分解模对应为曲面上的 permissible (closed) curve,不可分解模之间的不可约态射对应为曲线的旋转(pivot elementary moves). He Ping 等[7]在此基础上进一步刻画了 Skew-Gentle 代数的几何模型,并将 support τ-倾斜模刻画为曲面的剖分. I. Burban 等[8]给出了 Gentle 代数和 Skew-Gentle 代数的矩阵表示,并给出了投射复形范畴的不可分解对象的分类. 由此可见,对许多代数问题,Gentle 代数可以有效地提供算例或者反例.

对代数的研究可归结于对定义在此代数上的模的研究,并用特殊模类直接反映代数的性质. 如通过特殊模定义代数的同调维数(homological dimension),并用同调维数对代数进行分类. 其中整体维数可以反映给定代数到遗传代数的距离,自内射维数可以反映代数的 Gorenstein 同调性质. 文献[9]利用几何模型给出了 Gentle 代数的整体维数的曲面刻画,本文将利用矩阵模型给出 Gentle 代数的整体维数的矩阵刻画.

本文约定:k 是代数闭域. 对任意有限维 k-代数 A,总假设 A 是 Basic 代数,因此根据 Gabriel 图化定理,唯一存在箭图(quiver) Q,使得 $A\cong kQ/I$,其中 I 是可许理想(admissible ideal). 本文所考虑的模均是有限维 k-代数 A 上的有限生成右 A-模,并用记号 $\mathrm{mod}(A)$ 表示 A 的有限生成右 A-模范畴.

1　Gentle 代数

1.1　Gentle 代数及其定义

本节将介绍 Gentle 代数的箭图表示和矩阵表示. 这里箭图指 4 元组 $Q=(Q_0,Q_1,s,t)$,其中 Q_0 和 Q_1 是集合(2 者的元素分别被称为顶点(vertex)

收稿日期:2022-11-10
基金项目:国家自然科学基金(11961007)和贵州省科学技术基金([2020]1Y405)资助项目.
通信作者:章　超(1986—),男,湖北宜昌人,教授,博士,主要从事基础数学(代数学)研究. E-mail:zhangc@amss.ac.cn

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

和箭向(arrow)),s 和 t 是映射 $Q_1\to Q_0$,且 $\forall\alpha\in Q_1$,$s(\alpha)\in Q_0$ 和 $t(\alpha)\in Q_0$ 分别被称为 α 的起点和终点. 箭图 Q 上的一条路(path) $p=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l$ 指有序的箭向序列 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l$,其中 $t(\alpha_g)=s(\alpha_{g+1})(1\leqslant g<l)$,称 l 为 p 的长度(length),记作$l(p)$. 注意每一个箭向(或顶点)可以看作长度 1(或 0)的路. 因此,Q_0 和 Q_1 分别表示所有长度为 0 的路和长度为 1 的路的集合.

定义 1　箭图 $Q=(Q_0,Q_1,s,t)$ 的路代数(path algebra)kQ 是满足下述条件的 k-代数:

1)kQ 是以 $Q_{l\geqslant 0}=\bigcup\limits_{l\in\mathbf{N}}Q_l$ 为基底的 k-向量空间;

2)若 $t(\alpha_l)=s(\beta_1)$,则 $\forall p_1=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l, p_2=\beta_1\beta_2\cdots\beta_g\in Q_{l\geqslant 0}$,定义 $p_1p_2=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l\beta_1\beta_2\cdots\beta_g$;否则取 $p_1p_2=0$.

称路代数 kQ 的理想 I 为可许理想,若 $\exists m\geqslant 2$ 使得 $R_Q^m\subseteq I\subseteq R_Q^2$,其中记号 R_Q^l 表示 kQ 中所有长度$\geqslant l$ 的路生成的理想. 下面给出 Gentle 代数的箭图定义,该定义由文献[1,10]给出.

定义 2　称有限维代数 $A=kQ/I$ 是 Gentle 代数,若 A 满足:

1)$\forall a\in Q_0$,以 a 为起点或终点的箭向至多 2 个;

2)$\forall\alpha\in Q_1$,至多存在 1 个 $\beta\in Q_1$ 满足 $s(\beta)=t(\alpha)(s(\alpha)=t(\beta))$,使得 $\alpha\beta\in I(\beta\alpha\in I)$;

3)$\forall\alpha\in Q_1$,至多存在 1 个 $\beta\in Q_1$ 满足 $s(\beta)=t(\alpha)(s(\alpha)=t(\beta))$,使得 $\alpha\beta\notin I(\beta\alpha\notin I)$;

4)I 由长度为 2 的路生成.

为了刻画 Gentle 代数的整体维数在其箭图上的表示,需要引入 Forbidden 路的概念. Forbidden 路是文献[11]引入的,包括平凡和非平凡 2 类. 与之对偶的概念是 Permitted 路. Forbidden 路和 Permitted 路可以决定 Gentle 代数的 AG-导出不变量,进而研究 Gentle 代数在导出等价下的分类[11-12]. 这里只需要非平凡 Forbidden 路. Gentle 代数 A 上的一条非平凡 Forbidden 路 F 是长度$\geqslant 1$ 的路 $p=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s$,使得 $\alpha_i\alpha_j=0(1\leqslant i,j\leqslant s)$. 特别地,称 F 为极大的,如果 $\forall\alpha\in Q_1$ 使得 $t(\alpha)=s(\alpha_1)(s(\alpha)=t(\alpha_s))$,总有 $\alpha\alpha_1\notin I(\alpha_s\alpha\notin I)$.

接下来,给出 Gentle 代数的矩阵定义,并利用矩阵刻画 Gentle 代数上的单模.

定义 3　$\forall n\in\mathbf{N}^+$,定义 T_n 表示域 k 上的下三角矩阵代数:

$$T_n=\{\boldsymbol{X}=(X_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\mid\forall i<j,\text{恒有 } X_{ij}=0\}.$$

定义 4[8]　称代数 A 为 Gentle 代数,若

$$A\cong T_{\boldsymbol{m}}/\simeq=\{(\boldsymbol{X}^1,\boldsymbol{X}^2,\cdots,\boldsymbol{X}^t)\mid X^i_{jj}=X^l_{gg},(i,j)\simeq(l,g)\},$$

其中 $\boldsymbol{m}=(m_1,m_2,\cdots,m_t)\in\mathbf{N}^t(t\geqslant 2)$,$T_{\boldsymbol{m}}=\prod\limits_{i=1}^{t}T_{m_i}$,且"$\simeq$"是定义在 $O(\boldsymbol{m})=\{(i,j)\mid 1\leqslant i\leqslant t,1\leqslant j\leqslant m_i\}$ 上的 2 元映射,即 $\simeq:O(\boldsymbol{m})\times O(\boldsymbol{m})\to\{0,1\}$,满足:

1)对一些 $(i,j)\in O(\boldsymbol{m})$,唯一存在 $(l,k)\neq(i,j)$ 有 $(i,j)\simeq(l,k)$;

2)同时,对其余的 $(i,j)\in O(\boldsymbol{m})$,$\forall(l,k)\in O(\boldsymbol{m})$,$(i,j)\neq(l,k)$.

特别地,称 $T_{\boldsymbol{m}}$ 为 Gentle 代数 $A\cong T_{\boldsymbol{m}}/\simeq$ 的标准化(normalization)代数.

例 1　假设 Gentle 代数 $A=T_{(3,2)}/\simeq$,其中 $\boldsymbol{m}=(3,2)$,$O(\boldsymbol{m})=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2)\}$,且 $(1,2)\simeq(2,2)$. 按定义 4,$A=T_{(3,2)}/\simeq=\{(\boldsymbol{X}^1,\boldsymbol{X}^2)\mid X^1_{22}=X^2_{22}\}$. 且在同构意义下,$A$ 可写成分块对角矩阵的形式 $A=\boldsymbol{T}_3\times\boldsymbol{T}_2/\simeq$. 标准化代数 $T_{(3,2)}=\boldsymbol{T}_3\times\boldsymbol{T}_2$ 的笛卡儿积的因子项 $\boldsymbol{T}_3$ 和 $\boldsymbol{T}_2$ 分别对应上述分块对角矩阵的 2 个子块. 此外,由定义 4 有 $A\cong kQ/I$,其中

$$Q=\ 4\xrightarrow{a}3\begin{array}{l}\xrightarrow{b}2,\\ \xrightarrow{c}1,\end{array}\qquad I=(ab).$$

$\forall\boldsymbol{m}=(m_1,m_2,\cdots,m_t)\in\mathbf{N}^t(t\geqslant 2)$,用记号 $\boldsymbol{e}_{(r,s)}(1\leqslant r\leqslant t,1\leqslant s\leqslant m_r)$ 表示 $T_{\boldsymbol{m}}=\prod\limits_{i=1}^{t}T_{m_i}$ 中的元素满足下述条件的矩阵$(\boldsymbol{X}^1,\boldsymbol{X}^2,\cdots,\boldsymbol{X}^t)$:

$$X^{\omega}_{ij}=\begin{cases}1,\omega=r,i=j=s,\\0,\text{其他}.\end{cases}$$

进一步地,定义 $\boldsymbol{e}_{(r,s)(r',s')}=\boldsymbol{e}_{(r,s)}+\boldsymbol{e}_{(r',s')}(1\leqslant r\leqslant t,1\leqslant r'\leqslant t,1\leqslant s\leqslant m_r,1\leqslant s'\leqslant m'_r)$.

引理 1　设 $A\cong T_{\boldsymbol{m}}/\simeq$(其中 $\boldsymbol{m}=(m_1,m_2,\cdots,m_t)\in\mathbf{N}^t(t\geqslant 2)$)是 Gentle 代数,并记

$$\mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)=\{\boldsymbol{e}_{(i,j)}\mid(i,j)\neq(i',j'),(i',j')\in O(\boldsymbol{m})\},\mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)=\{\boldsymbol{e}_{(i,j)(k,l)}\mid(i,j)\simeq(k,l)\},$$

则 $\mathfrak{E}(A)=\mathfrak{E}^{I}(A)\bigcup\mathfrak{E}^{II}(A)$ 是 A 的完全本原正交幂等元集.

证　首先证 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathfrak{E}(A)$,有 $\boldsymbol{xy}=0=\boldsymbol{yx}$. 需验证 3 个情形:(a)$\boldsymbol{x}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)$且$\boldsymbol{y}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$;(b)$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)$;(c)$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$.

只证明(a),对于(b)和(c)的证明类似. 任取 $x=\boldsymbol{e}_{(i,j)}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A),y=\boldsymbol{e}_{(r,s)(r',s')}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$,有

$$\boldsymbol{e}_{(i,j)}\boldsymbol{e}_{(r,s)(r',s')}=\boldsymbol{e}_{(i,j)}\boldsymbol{e}_{(r,s)}+\boldsymbol{e}_{(i,j)}\boldsymbol{e}_{(r',s')}.$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

注意$(i,j)\neq(r,s)$, 否则$(i,j)=(r,s)\simeq(r',s')$与$\mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)$的定义矛盾, 故由矩阵乘法知$\boldsymbol{e}_{(i,j)}\boldsymbol{e}_{(r,s)}=0$. 同理, $\boldsymbol{e}_{(i,j)}\boldsymbol{e}_{(r',s')}=0$. 所以$\boldsymbol{xy}=\boldsymbol{e}_{(i,j)}\boldsymbol{e}_{(r,s)(r',s')}=0$. 类似可证$\boldsymbol{yx}=0$.

其次, 易见$\mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)$中的每个元素都是本原的. 对于$\mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$中的任意元素$\boldsymbol{y}$, 设$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_{(r,s)(r',s')}$, $\boldsymbol{y}$有唯一的加法分解$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_{(r,s)}+\boldsymbol{e}_{(r',s')}$. 注意$(r,s)\simeq(r',s')$, 因此由 Gentle 代数的定义可知$\boldsymbol{e}_{(r,s)}\notin A$且$\boldsymbol{e}_{(r',s')}\notin A$. 故该加法分解不是代数$A$上的分解, 即$\boldsymbol{y}$在$A$上本原.

最后, $\forall\boldsymbol{x}\in\mathfrak{E}(A)$, $\boldsymbol{x}^2=\boldsymbol{x}$由矩阵乘法直接得到. 故$\mathfrak{E}(A)$是$A$的完全本原正交幂等元集.

记$E_{\mathrm{simp}}(A)$表示A上的全体单模在同构意义下构成的集合. 引理 1 已经给出了A的完全本原正交幂等元集, 由此立刻得到下面结论.

推论 1 沿用引理 1 中的记号, 则$E_{\mathrm{simp}}(A)=\{S(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{e}A/\mathrm{rad}(\boldsymbol{e}A)\mid\boldsymbol{e}\in\mathfrak{E}(A)\}$.

注 1 在推论 1 中, 若$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}_{(r,s)}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)$, 则有右$A$-模同构$\boldsymbol{e}_{(r,s)}A\cong(\overset{\gg}{\boldsymbol{T}}{}^1,\overset{\gg}{\boldsymbol{T}}{}^2,\cdots,\overset{\gg}{\boldsymbol{T}}{}^t)$, 其中

$$\overset{\gg}{T}{}_{ij}^{\omega}=\begin{cases}k,\omega=r,i=s,\\0,\text{其他.}\end{cases}$$

注意这时有关于矩阵的等式$(\overset{\gg}{\boldsymbol{T}}{}^1,\overset{\gg}{\boldsymbol{T}}{}^2,\cdots,\overset{\gg}{\boldsymbol{T}}{}^t)=\boldsymbol{e}_{(r,s)}T_m$, 为简便起见, 记作$T_m(r,s)$. 易验证该矩阵是一个有限生成右$A$-模. 若$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}_{(r,s)(r',s')}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$, 则有如下右$A$-模同构:

$$\boldsymbol{e}_{(r,s)(r',s')}A\cong T_m(r,s)+T_m(r',s')\overset{\text{记作}}{=\!=}T_m((r,s)(r',s')).$$

注意, 虽然$T_m(r,s)+T_m(r',s')$是右A-模, 但是$T_m(r,s)$和$T_m(r',s')$都不是右A-模. 进一步地, $\mathrm{rad}(\boldsymbol{e}_{(r,s)}A)\cong(\widehat{\boldsymbol{T}}{}^1,\widehat{\boldsymbol{T}}{}^2,\cdots,\widehat{\boldsymbol{T}}{}^t)$, 其中

$$\overset{\gg}{T}{}_{ij}^{\omega}=\begin{cases}k,\omega=r,i=s,1\leqslant j<s,\\0,\text{其他.}\end{cases}$$

为方便起见, 用$R_m^r(I,J)$(其中$I,J\subseteq\{1,2,\cdots,m_r\}$)表示$A$的子集$(\boldsymbol{R}^1,\boldsymbol{R}^2,\cdots,\boldsymbol{R}^t)$, 使得除$R_{uv}^r=k$(其中$u\in I,v\in J$)外, 其余位置取 0. 则$\mathrm{rad}(\boldsymbol{e}_{(r,s)}A)=R_m^r(\{s\},\mathbf{N}^{q+}(q\leqslant s-1))$. 由此得到单模在$k$-线性同构下的矩阵表示:

$S_{(r,s)}=\boldsymbol{e}_{(r,s)}A/R_m^r(\{s\},\mathbf{N}^{q+}(q\leqslant s-1))\cong{}_k\boldsymbol{e}_{(r,s)}k$(其中$\boldsymbol{e}_{(r,s)}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)$);

$S_{(r,s)(r',s')}=\boldsymbol{e}_{(r,s)(r',s')}A/(R_m^r(\{s\},\mathbf{N}^{q+}(q\leqslant s-1))+R_m^{r'}(\{s'\},\mathbf{N}^{q'+}(q'\leqslant s'-1)))\cong{}_k\boldsymbol{e}_{(r,s)(r',s')}k$, 其中$\boldsymbol{e}_{(r,s)(r',s')}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$, 这里$\cong_k$表示$k$-向量空间的同构.

例 2 取A是例 1 给定的 Gentle 代数, 则$\mathfrak{E}(A)=\{\boldsymbol{e}_{(1,1)},\boldsymbol{e}_{(1,2)(2,2)},\boldsymbol{e}_{(1,3)},\boldsymbol{e}_{(2,1)}\}$. 因此, 在同构意义下, A上有 4 个不可分解投射模:

$$\boldsymbol{e}_{(1,1)}A\cong\begin{pmatrix}k&&&&&\\0&0&&&&\\0&0&0&&&\\&&&0&&\\&&&0&0&\\&&&&&\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_{(1,2)(2,2)}A\cong\begin{pmatrix}0&&&&&\\k&\hat{k}&&&&\\0&0&0&&&\\&&&0&&\\&&&&k&\hat{k}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_{(1,3)}A\cong\begin{pmatrix}0&&&&&\\0&0&&&&\\k&k&k&&&\\&&&0&&\\&&&0&0&\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_{(2,1)}A\cong\begin{pmatrix}0&&&&&\\0&0&&&&\\0&0&0&&&\\&&&k&&\\&&&0&0&\end{pmatrix}.$$

其中在$\boldsymbol{e}_{(1,2)(2,2)}A$的$\hat{k}$中所在位置元素取值相同, 并且

$$\mathrm{rad}(\boldsymbol{e}_{(1,1)}A)=0,\mathrm{rad}(\boldsymbol{e}_{(1,2)(2,2)}A)\cong\begin{pmatrix}0&&&&&\\k&0&&&&\\0&0&0&&&\\&&&0&&\\&&&k&0&\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{rad}(\boldsymbol{e}_{(1,3)}A)\cong\begin{pmatrix}0&&&&&\\0&0&&&&\\k&k&0&&&\\&&&0&&\\&&&0&0&\end{pmatrix},\mathrm{rad}(\boldsymbol{e}_{(2,1)}A)=0.$$

进一步, 可以得到 4 个单模的矩阵表示:

$$\boldsymbol{S}_{(1,1)}\cong\begin{pmatrix}k&&&&&\\0&0&&&&\\0&0&0&&&\\&&&0&&\\&&&0&0&\end{pmatrix},\boldsymbol{S}_{(1,2)(2,2)}\cong_k\begin{pmatrix}0&&&&&\\0&1&&&&\\0&0&0&&&\\&&&0&&\\&&&0&1&\end{pmatrix}k,$$

$$\boldsymbol{S}_{(1,3)}\cong_k\begin{pmatrix}0&&&&&\\0&0&&&&\\0&0&k&&&\\&&&0&&\\&&&0&0&\end{pmatrix},\boldsymbol{S}_{(2,1)}\cong\begin{pmatrix}0&&&&&\\0&0&&&&\\0&0&0&&&\\&&&k&&\\&&&0&0&\end{pmatrix}.$$

1.2 投射模与投射分解

设A是有限维k-代数. 众所周知, 对任意右A-模$M\in\mathrm{mod}(A)$, 总存在正合列

$$\cdots\xrightarrow{p_3^M}P_2^M\xrightarrow{p_2^M}P_1^M\xrightarrow{p_1^M}P_0^M\xrightarrow{p_0^M}M\longrightarrow0$$

使得$\forall i\geqslant0$有P_i^M投射. 称上述正合列是M的一个预投射分解. 特别地, 若$\exists n\in\mathbf{N}$使得$P_n^M\neq0$且$P_s=$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$0(s>n)$, 则称 n 是此预投射分解的长度. M 可以有不同的预投射分解, 本文称 M 的长度最短的预投射分解为其极小预投射分解或者简称为投射分解. 此时, 投射模 P_0^M 或者满同态 $p_0^M:P_0^M\to M$ 被称为 M 的投射覆盖, 且每个投射模 P_{i+1}^M 或者满同态 $p_{i+1}^M=p_0^{\ker(p_i^M)}:P_{i+1}^M\to\ker(p_i^M)$ 都是 $\ker(p_i^M)$ 的投射覆盖; $\ker(p_i^M)$ 被称为 M 的 $(i+1)$-阶合冲, 记作 $\Omega_{i+1}(M)$.

定义 5[13] (投射维数与整体维数)　设 A 是有限维 k-代数. 称 $M\in\mathrm{mod}(A)$ 的投射维数 $p_{\dim}(M)\leqslant n$, 若 $\Omega_{n+1}(M)=0$ (等价地, $p_{\dim}(M)$ 等于 M 的投射分解的长度). 特别地, 定义 A 的整体维数 $g_{\dim}(A)$ 是全部有限生成右 A-模的投射维数的上确界, 即

$$g_{\dim}(A)=\sup_{M\in\mathrm{mod}(A)}p_{\dim}(M).$$

注 2　通常地, 对任意环 R, 称右 R-模(左 R-模) M 的右(左)投射维数 $p_{\dim R}(M)\leqslant n$ (${}_Rp_{\dim}(M)\leqslant n$), 若 M 有右(左) R-预投射分解:

$$\cdots\to 0\xrightarrow{0}P_n^M\xrightarrow{p_n^M}P_{n-1}^M\to\cdots\to P_1^M\xrightarrow{p_1^M}P_0^M\xrightarrow{p_0^M}M\to 0.$$

因此, 定义 R 的右(左)整体维数 $g_{\dim R}(R)$ (${}_Rg_{\dim}(R)$) 是全部有限生成右(左) R-模的投射维数的上确界. 一般来说, $g_{\dim R}(R)\neq{}_Rg_{\dim}(R)$, 文献[14]给出了左、右整体维数不同的环; 文献[15]证明了 $\forall m,n(1\leqslant m<n\leqslant+\infty)$, 都存在环 R 使得 $g_{\dim R}(R)=m<n={}_Rg_{\dim}(R)$; 文献[16]将上述结果进一步推广至 Abel 范畴, 当 R 是有限维 k-代数时, 则有 $g_{\dim R}(R)={}_Rg_{\dim}(R)$.

在同构意义下, 记 $E_{\mathrm{proj}}(A)$ 是 A 上的全体右 A-投射模构成的集合. 沿用引理 1 中的记号, 根据文献[1], 有下述推论.

推论 2　$E_{\mathrm{proj}}(A)=\{\boldsymbol{e}\cdot(T_{\boldsymbol{m}}/\simeq)\mid\boldsymbol{e}\in\mathfrak{E}(A)\}$.

2　单模的非零合冲及其矩阵表示

注意代数的整体维数可以通过单模的投射维数来计算, 即

$$g_{\dim}(A)=\max_{S\in E_{\mathrm{simp}}(A)}p_{\dim}(S).$$

为此, 需要对单模的合冲进行刻画. 为方便起见, 始终假设 A 是 Gentle 代数, 其标准化代数为 $T_{\boldsymbol{m}}$, 这里 $\boldsymbol{m}=(m_1,m_2,\cdots,m_t)\in\mathbf{N}^t(t\geqslant 2)$, 并且 2 元映射 $\simeq:O(\boldsymbol{m})\times O(\boldsymbol{m})\to\{0,1\}$ 总事先给定.

2.1　单模的 1 阶合冲

下面引理给出了单模的投射覆盖的矩阵表示, 进一步可得单模的 1 阶合冲的矩阵表示.

引理 2　$\forall\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}_{(r,s)(r',s')}\in\mathfrak{E}(A)=\mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)\cup\mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$, 有 k-向量空间同构:

$$\mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{e}A,S(\boldsymbol{e}))\cong_k\mathrm{span}\{\hat{p}:T_{\boldsymbol{m}}((r,s)(r',s'))\to\boldsymbol{e}_{(r,s)(r',s')}k\},$$

其中 $\hat{p}$ 是典范投射, 即对任意属于 $T_{\boldsymbol{m}}((r,s)(r',s'))$ 的矩阵 $\boldsymbol{X}$, $\hat{p}(\boldsymbol{X})$ 将 $\boldsymbol{X}$ 处于主对角线以外的元素映射为 0, 主对角线上的元素保持不变.

证　若 $\boldsymbol{e}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(\mathrm{A})$, 则 $\exists(r,s)\simeq(r',s')\in O(\boldsymbol{m})$ 使得 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}_{(r,s)(r',s')}$. 首先 $p_0^{S(\boldsymbol{e})}:\boldsymbol{e}A\to S(\boldsymbol{e})$ 既是 $S(\boldsymbol{e})$ 的投射覆盖, 也是典范满同态 $\hat{p}_0^{S(\boldsymbol{e})}:\boldsymbol{e}A\to\boldsymbol{e}A/\mathrm{rad}(\boldsymbol{e}A)$. 根据注 1 可知,

$$\boldsymbol{e}A\cong T_{\boldsymbol{m}}((r,s)(r',s')),\boldsymbol{e}A/\mathrm{rad}(\boldsymbol{e}A)\cong_k\boldsymbol{e}_{(r,s)(r',s')}k.$$

由此易见 $\hat{p}_0^{S(\boldsymbol{e})}\in\mathrm{Hom}_k(T_{\boldsymbol{m}}((r,s)(r',s')),\boldsymbol{e}_{(r,s)(r',s')}k)$ 保持 $\boldsymbol{X}$ 的主对角线上的元素不变, 并将 $\boldsymbol{X}$ 的其余元素映射为 0 ($\boldsymbol{X}$ 是任意给定的属于 $T_{\boldsymbol{m}}((r,s)(r',s'))$ 的矩阵). 于是, 存在 k-向量空间的典范嵌入

$$\kappa:\mathrm{span}\{\hat{p}\}\xrightarrow{\subseteq}\mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{e}A,S(\boldsymbol{e})).$$

另外, $\mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{e}A,S(\boldsymbol{e}))\cong S(\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$, 且由有限维代数上的单模 $S(\boldsymbol{e})$ 总是 1 维的 k-向量空间可知 $S(\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$ 也是 1 维的, 于是有 k-向量空间同构 $\mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{e}A,S(\boldsymbol{e}))\cong_k k$. 故 κ 是 k-线性同构. 对于 $\boldsymbol{e}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)$ 的情形, 证明类似.

注 3　沿用引理 2 中的记号. 对矩阵 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}^1,\boldsymbol{X}^2,\cdots,\boldsymbol{X}^t)\in A$, 用记号 $\boldsymbol{X}^i_{x\leftrightarrow y}$ 表示交换 $\boldsymbol{X}^i$ 的第 x 行和第 y 行. 则引理 2 给出了投射覆盖 $p_0^{S(\boldsymbol{e})}$ ($p_0^{S(\boldsymbol{e})}=\boldsymbol{e}A\to S(\boldsymbol{e})$) 的矩阵刻画. 进一步地,

1) 若 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}_{(r,s)}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)$, 则有右 A-同构

$$\Omega_1(S(\boldsymbol{e}))(=\ker(p_0^{S(\boldsymbol{e})}))\cong\mathrm{rad}(\boldsymbol{e}_{(r,s)}T_{\boldsymbol{m}})\boldsymbol{X}^r_{s\leftrightarrow s-1}=R^r_{\boldsymbol{m}}(\{s-1\},\mathbf{N}^{t+}(t\leqslant s-1)).$$

2) 若 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}_{(r,s)(r',s')}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$, 则有右 A-同构

$$\Omega_1(S(\boldsymbol{e}))(=\ker(p_0^{S(\boldsymbol{e})}))\cong\mathrm{rad}(\boldsymbol{e}_{(r,s)(r',s')}T_{\boldsymbol{m}})\cdot\boldsymbol{X}^r_{s\leftrightarrow s-1}\boldsymbol{X}^{r'}_{s'\leftrightarrow s'-1}.$$

注意 2) 所给的右 A-同构进一步指出当 $\Omega_1(S(\boldsymbol{e}))$ 作为 k-向量空间时, 同构于:

(a) $R\oplus R'$, 若 $(r,s-1)\neq(i,j)$, $\forall(i,j)\in O(\boldsymbol{m})$, 且 $(r',s'-1)\neq(i,j)$, $\forall(i,j)\in O(\boldsymbol{m})$;

(b) $((R+\boldsymbol{e}_{(u,v)}k)/\mathfrak{S})\oplus_kR'$, 若 $(r,s-1)\simeq(u,v)$, 且 $(r',s'-1)\neq(i,j)$, $\forall(i,j)\in O(\boldsymbol{m})$;

(c) $R\oplus_k((R'+\boldsymbol{e}_{(u',v')}k)/\mathfrak{S}')$, 若 $(r,s-1)\neq(i,j)$, $\forall(i,j)\in O(\boldsymbol{m})$, 且 $(r',s'-1)\simeq(u',v')$;

(d) $((R+\boldsymbol{e}_{(u,v)}k)/\mathfrak{S})\oplus_k((R'+\boldsymbol{e}_{(u',v')}k)/$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$\mathfrak{S}'$),若$(r,s-1)\simeq(u,v)$且$(r',s'-1)\simeq(u',v')$. 其中 $R=R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s-1\},\mathbf{N}^{t+}(t\leqslant s-1))$, $R'=R_{\boldsymbol{m}}^{r'}(\{s'-1\},\mathbf{N}^{t'+}(t'\leqslant s'-1))$, $\mathfrak{S}=\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_{(u,v)}-\boldsymbol{e}_{(r,s-1)}\}$, $\mathfrak{S}'=\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_{(u',v')}-\boldsymbol{e}_{(r',s'-1)}\}$, $\oplus_k$ 表示作为 k-向量空间的直和, 并且上式第 1 个情形下的 k-向量空间同构,同时也是右 A-模同构.

推论 3 设 $s\geqslant 2$,则 $R=R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s\},\mathbf{N}^{t+}(t\leqslant s-1))$不可分解投射当且仅当 $\forall(i,j)\in O(\boldsymbol{m})$有$(r,s-1)\neq(i,j)$.

证 注意 $R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s\},\mathbf{N}^{t+}(t\leqslant s-1))$是右 A-模. 由注 3 易知它是 $\operatorname{rad}(\boldsymbol{e}_{(r,s)}A)$的直和项. 则

$$R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s-1\},\mathbf{N}^{t+}(t\leqslant s-1))=R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s\},\mathbf{N}^{t+}(t\leqslant s-1))\boldsymbol{X}_{s\leftrightarrow s-1}^{r}\cong R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s\},\mathbf{N}^{t+}(t\leqslant s-1)).$$

即 $R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s\},\mathbf{N}^{t+}(t\leqslant s-1))\cong\boldsymbol{e}_{(r,s-1)}A$. 此时, 若 $\forall(i,j)\in O(\boldsymbol{m})$都有$(r,s-1)\neq(i,j)$,则由引理 1 得 $\boldsymbol{e}_{(r,s-1)}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)$, 故 $\boldsymbol{e}_{(r,s-1)}A$ 是不可分解投射模. 反之, 若$\exists(i,j)\in O(\boldsymbol{m})$有$(r,s-1)\simeq(i,j)$, 则由引理 1 得 $\boldsymbol{e}_{(r,s-1)}\notin\mathfrak{E}^{\mathrm{I}}(A)$ (此时 $\boldsymbol{e}_{(r,s-1)(i,j)}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$), 因此由注 1 可知 $\boldsymbol{e}_{(r,s-1)}(T_{\boldsymbol{m}}/\simeq)$非投射, 矛盾.

2.2 单模的高阶合冲

类似引理2, 下面命题给出了单模的任意阶合冲的投射覆盖的矩阵表示, 由此, 类似于注 3, 该命题也给出了单模的任意阶合冲的矩阵表示.

命题 1 设 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}_{(r,s)(u,v)}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$是 $A=T_{\boldsymbol{m}}/\simeq$ 的本原幂等元. 若

$$\boldsymbol{\Omega}_n(S(\boldsymbol{e}))\cong_k(R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s\},\mathbf{N}^{t+}(t\leqslant s))\oplus_k e_{(u,v)}k)/\mathfrak{S}$$

(或者 $\boldsymbol{\Omega}_n(S(\boldsymbol{e}))=\boldsymbol{\omega}_n^1\oplus\boldsymbol{\omega}_n^2$, 这里, $\boldsymbol{\omega}_n^{\lambda}\cong_k(R_{\boldsymbol{m}}^{r^{\lambda}}(\{s^{\lambda}\},\mathbf{N}^{t+}(t\leqslant s^{\lambda}))\oplus_k\boldsymbol{e}_{(u^{\lambda},v^{\lambda})}k)/\mathfrak{S}^{\lambda}$, $\lambda\in\{1,2\}$), 其中 $\mathfrak{S}=\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_{(u,v)}-\boldsymbol{e}_{(r,s)}\}$(或者 $\mathfrak{S}^{\lambda}=\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_{(u^{\lambda},v^{\lambda})}-\boldsymbol{e}_{(r^{\lambda},s^{\lambda})}\}$), 则有 k-向量空间同构

$$\operatorname{Hom}_A(\boldsymbol{e}A,\boldsymbol{\Omega}_n(S(\boldsymbol{e})))\cong_k\operatorname{span}\{\hat{p}:T_{\boldsymbol{m}}((r,s)(u,v))\to(R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s\},\mathbf{N}^{t+}(t\leqslant s))\oplus_k\boldsymbol{e}_{(u,v)}k)/\mathfrak{S}\}$$

(或者

$$\operatorname{Hom}_A(\boldsymbol{e}A,\boldsymbol{\omega}_n^{\lambda})\cong_k\operatorname{span}\{\hat{p}^{\lambda}:T_{\boldsymbol{m}}((r^{\lambda},s^{\lambda})(u^{\lambda},v^{\lambda}))\to(R_{\boldsymbol{m}}^{r^{\lambda}}(\{s^{\lambda}\},\mathbf{N}^{t+}(t\leqslant s^{\lambda}))\oplus_k\boldsymbol{e}_{(u^{\lambda},v^{\lambda})}k)/\mathfrak{S}^{\lambda}\}),$$

其中 $\hat{p}$(或者 $\hat{p}^{\lambda}$)是按像空间作为原像空间 $T_{\boldsymbol{m}}((r,s)(u,v))$(或者 $T_{\boldsymbol{m}}((r^{\lambda},s^{\lambda})(u^{\lambda},v^{\lambda}))$)子空间所诱导的典范投射.

证 设 $\boldsymbol{\Omega}_n(S(\boldsymbol{e}))\cong_k(R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s\},\mathbf{N}^{t+}(t\leqslant s))\oplus_k\boldsymbol{e}_{(u,v)}k)/\mathfrak{S}$. 注意这时

$$\boldsymbol{e}A\cong\boldsymbol{e}_{(r,s)(u,v)}(T_{\boldsymbol{m}}/\simeq)\cong_k T_{\boldsymbol{m}}((r,s)(u,v)),$$

所以,$p_0^{\Omega_n(S(\boldsymbol{e}))}\in\operatorname{Hom}_A(\boldsymbol{e}A,\boldsymbol{\Omega}_n(S(\boldsymbol{e})))$作为 k-线性映射的意义下与 $\hat{p}$ 同构. 因此,有 k-向量空间的典范嵌入

$$\boldsymbol{\kappa}:\operatorname{span}\{\hat{p}:T_{\boldsymbol{m}}((r,s)(u,v))\to(R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s\},\mathbf{N}^{t+}(t\leqslant s))\oplus_k\boldsymbol{e}_{(u,v)}k)/\mathfrak{S}\}\xrightarrow{\subseteq}\operatorname{Hom}_A(\boldsymbol{e}A,\boldsymbol{\Omega}_n(S(\boldsymbol{e}))).$$

注意有右 A-模同构$\operatorname{Hom}_A(\boldsymbol{e}A,\boldsymbol{\Omega}_n(S(\boldsymbol{e})))\cong\boldsymbol{\Omega}_n(S(\boldsymbol{e}))\boldsymbol{e}$, 进而有 k-向量空间的同构

$$\operatorname{Hom}_A(\boldsymbol{e}A,\boldsymbol{\Omega}_n(S(\boldsymbol{e})))\cong_k((R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s\},\mathbf{N}^{t+}(t\leqslant s))\oplus_k\boldsymbol{e}_{(u,v)}k)/\mathfrak{S})\boldsymbol{e}_{(r,s)(u,v)}=((R_{\boldsymbol{m}}^{r}(\{s\},\mathbf{N}^{t+}(t\leqslant s))\boldsymbol{e}_{(r,s)(u,v)}\oplus_k\boldsymbol{e}_{(u,v)}k)/\mathfrak{S}=(\boldsymbol{e}_{(r,s)}k\oplus_k\boldsymbol{e}_{(u,v)}k)/\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_{(r,s)}-\boldsymbol{e}_{(u,v)}\}\cong_k k.$$

即$\operatorname{Hom}_A(\boldsymbol{e}A,\boldsymbol{\Omega}_n(S(\boldsymbol{e})))$是1 维 k-向量空间, 所以 $\boldsymbol{\kappa}$ 是 k-线性同构. 对于 $\boldsymbol{\Omega}_n(S(\boldsymbol{e}))=\boldsymbol{\omega}_n^1\oplus\boldsymbol{\omega}_n^2$ 的情形的证明类似.

注 4 沿用命题 1 中的记号, 类似于注 3, 有 $\boldsymbol{\Omega}_{n+1}(S(\boldsymbol{e}))=\boldsymbol{\omega}_{n+1}^1(S(\boldsymbol{e}))\oplus\boldsymbol{\omega}_{n+1}^2(S(\boldsymbol{e}))$, 其中

$$\boldsymbol{\omega}_{n+1}^{\lambda}(S(\boldsymbol{e}))\cong_k\begin{cases}R^{\lambda},(u^{\lambda},v^{\lambda}-1)\neq(i^{\lambda},j^{\lambda}),(i^{\lambda},j^{\lambda})\in O(\boldsymbol{m}),\\(R^{\lambda}+\boldsymbol{e}_{(w^{\lambda},x^{\lambda})}^{\lambda}k)/\mathfrak{S}^{\lambda},(u^{\lambda},v^{\lambda}-1)\simeq(w^{\lambda},x^{\lambda}),\end{cases}$$

其中 $\lambda\in\{1,2\}$, $R^{\lambda}=R_{\boldsymbol{m}}^{u^{\lambda}}(\{v^{\lambda}-1\},\mathbf{N}^{t+}(t\leqslant v^{\lambda}-1))$, $\mathfrak{S}^{\lambda}=\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_{(w^{\lambda},x^{\lambda})}-\boldsymbol{e}_{(u^{\lambda},v^{\lambda}-1)}\}$, 并且上式第 1 个情形下的 k-向量空间同构, 同时也是右 A-模同构.

$\forall M\in\operatorname{mod}(A)$,用 $\boldsymbol{\Omega}(M)$表示 M 的全体非零合冲构成的集合.

3 Gentle 代数的整体维数

为刻画 Gentle 代数的整体维数,引入标准化代数 $T_{\boldsymbol{m}}=(T_{m_1},T_{m_2},\cdots,T_{m_t})$的关联子块的定义, 其中 $\boldsymbol{m}=(m_1,m_2,\cdots,m_t)\in\mathbf{N}^{t}(t\geqslant 0)$. 称 $T_{\boldsymbol{m}}$的子块 T_{m_r} 和 T_{m_u}是关联的, 记作 $T_{m_r}\sim T_{m_u}$,若 $\exists s(1\leqslant s\leqslant m_r)$ 和 $\exists v(1\leqslant v\leqslant m_u)$使得$(r,s)\simeq(u,v)$,并称集合 $\{(r,s),(u,v)\}$是此关联的关联集. $T_{\boldsymbol{m}}$的关联子块组是子块序列 $\{T_{m(j)}\}_{j=1}^{n}$(其中 $m(j)\in\{m_i\mid 1\leqslant i\leqslant t\}$, $n\in\mathbf{N}^{+}$或 $n=\infty$)使得 $\forall j(1\leqslant j<n)$有关联 $T_{m(j)}\sim T_{m(j+1)}$, 并进一步称 $T_{\boldsymbol{m}}$的分块 $T_{m(j)}$是此关联子块组的 j-关联结. 称关联子块组 $\{T_{m(j)}\}_{j=1}^{n}$是连续的, 若 $\forall j(1\leqslant j<n)$,关联 $T_{m(j-1)}\sim T_{m(j)}$和 $T_{m(j)}\sim T_{m(j+1)}$的关联集 $\{(u'_{j-1},v'_{j-1}),(r_j,s_j)\}$ 和 $\{(r'_j,s'_j),(u_{j+1},v_{j+1})\}$能使 $r'_j=r_j$ 和 $s'_j=s_j-1$ 成立. 特别地,称连续关联子块组 $C_1=\{T_{m(j)}\}_{j=1}^{n}$是极大的,若对任意连续关联子块组 C_2 使得 $C_1\subseteq C_2$,总是有 $C_1=C_2$.

命题 2 任取 $\boldsymbol{e}\in\mathfrak{E}(A)$, 存在 $T_{\boldsymbol{m}}$的极大连续关

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

联子块组 $C(\boldsymbol{e})=\{T_{m(j)}\}_{j=1}^{n_e}$($n_e\in\mathbf{N}^+$ 或 $n_e=\infty$),使得关联结集合 $\{T_{m(j)}\mid 1\leqslant j\leqslant n_e\}$ 和非零合冲集 $\Omega(S(\boldsymbol{e}))$ 一一对应.

证　不妨设 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}_{(\boldsymbol{u}_0^1,\boldsymbol{v}_0^1)(\boldsymbol{u}_0^2,\boldsymbol{v}_0^2)}\in\mathfrak{E}^{\mathrm{II}}(A)$,则由引理 2,有 k-向量空间同构

$$\mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{e}A,S(\boldsymbol{e}))\cong_k\mathrm{span}\{\hat{p}_0^{S(\boldsymbol{e})}:T_m((u_0^1,v_0^1)(u_0^2,v_0^2))\to\boldsymbol{e}_{(u_0^1,v_0^1)(u_0^2,v_0^2)}k\},$$

则 $\boldsymbol{e}_{(u_0^1,v_0^1)}\in T_{\boldsymbol{m}(u_0^1)}$,$\boldsymbol{e}_{(u_0^2,v_0^2)}\in T_{\boldsymbol{m}(u_0^2)}$. 其中 $\hat{p}_0^{S(\boldsymbol{e})}$ 由 $S(\boldsymbol{e})$ 的投射覆盖 $p_0^{S(\boldsymbol{e})}\to S(\boldsymbol{e})$ 作为 k-线性映射得到. 由注 3 知,$\Omega_1(S(\boldsymbol{e}))=\ker(p_0^{S(\boldsymbol{e})})=\omega_1^1\oplus\omega_1^2\cong_k R_1^1\oplus R_1^2$,其中 $\lambda\in\{1,2\}$,$R_1^\lambda\cong_k R_{\boldsymbol{m}}^{u_0^\lambda}(\{v_0^\lambda\},\mathbf{N}^{t+}(t\leqslant v_0^\lambda-1))$. 若 $\exists(u_1^\lambda,v_1^\lambda)\simeq(u_0^\lambda,v_0^\lambda-1)$,则进一步有

$$R_1^\lambda\cong_k(R_{\boldsymbol{m}}^{u_0^\lambda}(\{v_0^\lambda-1\},\mathbf{N}^{t+}(t\leqslant v_0^\lambda-1))\oplus_k\boldsymbol{e}_{(u_1^\lambda,v_1^\lambda)}\cdot k)/\mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_{(u_1^\lambda,v_1^\lambda)}-\boldsymbol{e}_{(u_0^\lambda,v_0^\lambda-1)}\}.$$

所以,根据命题 1(在此命题中取 $n=1$)有 k-向量空间同构

$$\mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{e}_{(u_0^\lambda,v_0^\lambda-1)(u_1^\lambda,v_1^\lambda)}A,\omega_1^\lambda)\cong_k\mathrm{span}\{T_{\boldsymbol{m}}((u_0^\lambda,v_0^\lambda-1)(u_1^\lambda,v_1^\lambda))\to R_1^\lambda\},$$

于是 $\boldsymbol{e}_{(u_1^\lambda,v_1^\lambda)}\in T_{m(u_1^\lambda)}$. 此时 $T_{m(u_0^\lambda)}\sim T_{m(u_1^\lambda)}$,关联集合为 $\{(u_0^\lambda,v_0^\lambda-1),(u_1^\lambda,v_1^\lambda)\}$. 由注 4 可知(在此注记中取 $n=1$)$\omega_2^\lambda\cong_k(R_2^\lambda+\boldsymbol{e}_{(u_2^\lambda,v_2^\lambda)}k)/\mathfrak{S}^\lambda$,若 $\exists(u_1^\lambda,v_1^\lambda-1)\simeq(u_2^\lambda,v_2^\lambda)$;否则 $\omega_2^\lambda\cong_k R_2^\lambda$,此时根据推论 3,$\omega_2^\lambda$ 是不可分解投射模. 再次使用命题 1(在此命题中取 $n=2$),有

$$\mathrm{Hom}_A(\boldsymbol{e}_{(u_1^\lambda,v_1^\lambda-1)(u_2^\lambda,v_2^\lambda)}A,\omega_2^\lambda)\cong_k\mathrm{span}\{T_{\boldsymbol{m}}((u_1^\lambda,v_1^\lambda-1)(u_2^\lambda,v_2^\lambda))\to R_2^\lambda\},$$

并且得 $\boldsymbol{e}_{(u_2^\lambda,v_2^\lambda)}\in T_{m(u_2^\lambda)}$. 此时 $T_{m(u_1^\lambda)}\sim T_{m(u_2^\lambda)}$,关联集合为 $\{(u_1^\lambda,v_1^\lambda-1),(u_2^\lambda,v_2^\lambda)\}$.

易见 $\{T_{m(u_0^\lambda)},T_{m(u_1^\lambda)},T_{m(u_2^\lambda)}\}$ 是 $T_{\boldsymbol{m}}$ 的 1 个连续关联子块组. 由归纳法知,可以构造 1 个 $T_{\boldsymbol{m}}$ 的极大连续关联子块组 $\{T_{m(u_j^\lambda)}\}_{j=1}^{n_e^\lambda}$,使得 $f:\{T_{m(u_j^\lambda)}\mid 1\leqslant j\leqslant n_e^\lambda\}\to\Omega(S(\boldsymbol{e}))$,$T_{m(u_j^\lambda)}\mapsto\Omega_j(S(\boldsymbol{e}))$ 是双射,这是因为:

1)若 $\exists n\in\mathbf{N}^+$ 使得 $\Omega_n(S(\boldsymbol{e}))\neq 0$ 但 $\Omega_{n+1}(S(\boldsymbol{e}))=0$,则 ω_n^λ 是不可分解投射模(见推论 3),且 $\omega_{n+1}^\lambda\cong R_{n+1}^\lambda$ 的维数等于 0;

2)若 $\forall n\in\mathbf{N}^+$ 都有 $\Omega_n(S(\boldsymbol{e}))\neq 0$,重复使用命题 1,然后由推论 3 得 $\omega_n^\lambda\cong R_n^\lambda\neq 0$,则 $\{T_{m(u_j^\lambda)}\}_{j=1}^{n_e^\lambda}$ 和 $\Omega(S(\boldsymbol{e}))$ 都是可数无限集.

注意 $\lambda\in\{1,2\}$,取 $n_e=\max\{n_e^1,n_e^2\}$ 即得所要寻找的 $T_{\boldsymbol{m}}$ 的极大连续关联子块组.

定理 1　设 Gentle 代数 A 非单,其标准化代数 $T_{\boldsymbol{m}}$ 的全体极大连续关联子块组构成的集合是 $m(A)$,则 $g_{\dim}(A)=\max\limits_{\{T_{m(j)}\}_{j=1}^n\in m(A)}n$,其中 $n\in\mathbf{N}^+\cup\{\infty\}$.

证　由 $g_{\dim}(A)=\max\limits_{S\in E_{\mathrm{simp}}(A)}p_{\dim}(S)$ 以及命题 2 即得.

令 $\mathfrak{F}(A)$ 是由 Gentle 代数 A 上的全体极大的非平凡 Forbidden 路构成的集合,$m(A)$ 是 A 上全体极大连续关联子块组构成的集合. 下面给出 Gentle 代数的整体维数在箭图上的表示.

定理 2　设 A 是 Gentle 代数,则 $g_{\dim}(A)=\max\limits_{F\in\mathfrak{F}(A)}l(F)$.

证　为证此命题,只需证存在双射 $H:\mathfrak{F}(A)\to m(A)$. 证明分为(a)和(b)2 个部分. 在(a)中先给出 H 的构造,并证明 H 是单射. 然后在(b)中证明 H 也是满射.

(a)设 $\boldsymbol{m}=(m_1,m_2,\cdots,m_t)\in\mathbf{N}^t(t\geqslant 2)$. 任取 $F=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\in\mathfrak{F}(A)$,由 $\alpha_i\alpha_{i+1}\in I(1\leqslant i<n)$ 可知,$\exists r_1,r_2,\cdots,r_n\in\{m_1,m_2,\cdots,m_t\}$,使得

$$(r_j,s_j)\simeq(r_{j+1},s_{j+1}),(r_{j+1},s_{j+1}-1)\simeq(r_{j+2},s_{j+2}),\forall j=1,3,5,\cdots,\text{且}\ j\leqslant n-2.$$

此时,令 $H(F)=\{T_{m(j)}\}_{j=1}^n$,使得有关联 $T_{m(j)}\simeq T_{m(j+1)}$(关联集 $\{(r_j,s_j),(r_{j+1},s_{j+1})\}$),以及 $T_{m(j+1)}\simeq T_{m(j+2)}$(关联集 $\{(r_{j+1},s_{j+1}-1),(r_{j+2},s_{j+2})\}$). 显然,对不同的极大非平凡 Forbidden 路 F,按上述构造所得的 $H(F)$ 唯一决定. 于是 H 单.

(b)反之,任取 $\{T_{m(j)}\}_{j=1}^n\in\mathfrak{F}(A)$,并设 $T_{m(j-1)}\sim T_{m(j)}$(关联集 $\{(u'_{j-1},v'_{j-1}),(r_j,s_j)\}$),$T_{m(j)}\sim T_{m(j+1)}$(关联集 $\{(r'_j,s'_j),(u_{j+1},v_{j+1})\}$). 令 $(u'_{j-1},v'_{j-1}+1)$ 对应点 $t_{j-1}\in Q_0$,(u'_{j-1},v'_{j-1}) 和 (r_j,s_j) 对应点 $t_j\in Q_0$,(r'_j,s'_j) 和 (u_{j+1},v_{j+1}) 对应点 $t_{j+1}\in Q_0$,(r_j,s_j+1) 对应点 $t_{j+2}\in Q_0$,则存在箭向 $\alpha_{j-1}:t_{j-1}\to t_j$,$\alpha_j:t_j\to t_{j+1}$ 和 $\alpha_{j+1}:t_{j+1}\to t_{j+2}$ 使得 $\alpha_{j-1}\alpha_j\in I$ 且 $\alpha_j\alpha_{j+1}\in I$. 可见 $\{T_{m(j)}\}_{j=1}^n$ 对应一条非平凡的 Forbidden 路 $p=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$. 由于 $\{T_{m(j)}\}_{j=1}^n$ 是极大的,所以 p 也极大. 否则,若 $\exists p'\supseteq p$ 极大,则根据(a)有 $H(p')\supseteq\{T_{m(j)}\}_{j=1}^n$,与 $\{T_{m(j)}\}_{j=1}^n$ 极大性矛盾. 这样就构造了 $p\in\mathfrak{F}(A)$ 使得 $H(p)=\{T_{m(j)}\}_{j=1}^n$. 于是 H 满. 再由定理 1 就得到了 $g_{\dim}(A)=\max\limits_{F\in\mathfrak{F}(A)}l(F)$.

4　参考文献

[1] ASSEM I,SKOWROŃSKI A. Iterated tilted algebras of type $\widetilde{A}_n$ [J]. Mathematische Zeitschrift, 1987, 195 (2): 269-290.

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

[2] WALD B, WASCHBSÜCH J. Tame biserial algebras [J]. Journal of Algebra, 1985, 95(2): 480-500.
[3] BUTLER M C R, RINGEL C M. Auslander-reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras [J]. Communications in Algebra, 1987, 15(1/2): 145-179.
[4] CRAWLEY-BOEVEY W W. Maps between representations of zero-relation algebras [J]. Journal of Algebra, 1989, 126(2): 259-263.
[5] KRAUSE H. Maps between tree and band modules [J]. Journal of Algebra, 1991, 137(1): 186-194.
[6] BAUR K, SIMÕES R C. A geometric model for the module category of a gentle algebra [J]. International Mathematics Research Notices, 2021, 2021(15): 11357-11392.
[7] HE Ping, ZHOU Yu, ZHU Bin. A geometric model for the module category of a skew-gentle algebra [EB/OL]. (2020-12-28) [2022-8-5]. https://arxiv.org/pdf/2004.11136.pdf.
[8] BURBAN I, DROZD Y. On the derived categories of gentle and skew-gentle algebras: homological algebra and matrix problems [EB/OL]. (2017-1-26) [2022-8-5]. https://arxiv.org/pdf/1706.08358.pdf.
[9] LIU Yuzhe, GAO Hanpeng, HUANG Zhaoyong. Homological dimensions of gentle algebras via geometric models [EB/OL]. (2023-3-3) [2023-3-20]. http://engine.scichina.com/doi/10.1007/s11425-022-2120-8.
[10] ASSEM I, SIMSON D, SKOWROŃSKI A. Elements of the representation theory of associative algebras (volume 1): techniques of representation theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
[11] AVELLA-ALAMINOS D, GEISS C. Combinatorial derived invariants for gentle algebras [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2008, 212(1): 228-243.
[12] AMIOT C, PLAMONDON P G, SCHROLL S. A complete derived invariant for gentle algebras via winding numbers and Arf invariants [J]. Selecta Mathematica: New Series, 2023, 29(2): 30.
[13] WEIBEL C A. An introduction to homological algebra [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
[14] KAPLANSKY I. On the dimension of modules and algebras, X: a right hereditary ring which is not left hereditary [J]. Nagoya Mathematical Journal, 1958, 13: 85-88.
[15] JATEGAONKAR A V. A counter-example in ring theory and homological algebra [J]. Journal of Algebra, 1969, 12(3): 418-440.
[16] FOSSUM R M, GRIFFITH P A, REITEN I. Trivial extensions of Abelian categories: homological algebra of trivial extensions of Abelian catergories with applications to ring theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1975.

The Matrix Model of Gentle Algebra and the Global Dimension

ZHANG Mengdie[1], LIU Yuzhe[2], ZHANG Chao[1*]
(1. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou 550025, China;
2. Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing Jiangsu 210093, China)

Abstract: It is showed that for Gentle algebra, the simple module and projective module can be characterized by matrix model, and a matrix representation of projective resolution of simple module is provided. Thus the global dimension of a Gentle algebra can be characterized by a special submatrix sequence induced by its matrix model. Furthermore, by showing that above special submatrix sequences correspond to maximal non-trivial Forbidden paths on the quiver of Gentle algebra, the global dimension of Gentle algebra equals the length of the maximal nontrivial Forbidden path is obtained.

Key word: projective module; projective resolution; homological dimension; matrix representation; quiver representation.

(责任编辑:曾剑锋)

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net