

王兆辉,刘邱云,吴根秀,等.基于 Pareto 法则的 BPA 概率转换[J].江西师范大学学报(自然科学版),2023,47(3):287-295.  
WANG Zhaohui,LIU Qiuyun,WU Genxiu, et al,The probability transformation of BPA based on pareto principle[J]. Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science),2023,47(3):287-295.

文章编号:1000-5862(2023)03-0287-09

# 基于 Pareto 法则的 BPA 概率转换

王兆辉,刘邱云\*,吴根秀,朱鸿祥

(江西师范大学数学与统计学院,江西 南昌,330022)

**摘要:**基于帕累托(Pareto)法则,该文认为复杂焦元信度的分配应该依赖于其单子命题的信度,信度大的更能决定复杂焦元的分配,信度为零的也能影响复杂焦元的分配.将复杂焦元分成2类结构:单子命题没有零值和单子命题有零值.对于前者,找出了复杂焦元的帕累托元素,只在帕累托元素上按其信度权重进行分配,这既避免了一些反常的情况又能更加突出信度大的单子命题.对于后者,采用忽略一部分或平均的办法来进行分配;设置了2个参数,既能控制焦元分配的冒险程度,又能控制转换的效果.提出了一种能够根据给定冒险程度来计算基本概率分配函数概率转换的新方法.最后通过实例分析,验证了该方法是有效的.

**关键词:**基本概率分配函数;概率转换;帕累托法则;决策

**中图分类号:**TP 391 **文献标志码:**A **DOI:**10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2023.03.09

## 0 引言

证据理论对于概率论的优势<sup>[1]</sup>主要有:能够表达“不知道”和“不确定”的能力;比贝叶斯概率论满足更弱的条件;不需要先验分布.由于它运用DS合成后得到的是各命题的信任区间,不是像概率论那样得到命题的概率值,所以运用证据理论的相关知识如何去做出可靠的决策是一个非常值得研究的课题.通过将BPA做概率转换<sup>[2]</sup>,使之转化为概率函数是一个简单可行的方法,这种转换的核心点就是如何将复杂焦元上的信度分配给它的单子命题.国内外许多学者都对此做了一些相关研究.最经典的是P. Smets等<sup>[3]</sup>提出的Pignistic概率转换,其核心思想是将在复杂焦元上的信度平均分配给它的单子命题,但是这种分配在某些情况下却放大了不确定性.究其原因没有考虑在单子命题上的信度.受文献[3]的启发,文献[4-7]运用信任函数与似真度函数等提出了4种按不同权重分配的转换

方法,相比Pignistic概率转换,这4种方法都在不同程度上增强了信息的确定性,但是某些方法没有考虑分母为0的情况,即在单子命题上的信度为0的情况.潘巍等<sup>[8]</sup>认为仅从某一种信度进行权重分配是片面的,提出了3种基于2元函数 $f(b, P_i)$ 的概率转换方法,这种分配方法用概率信息量(probabilistic information content, PIC)评价都能得出较好的结果,但无法得知分配的冒险程度. Han Deqiang等<sup>[9]</sup>根据信息熵最小化原则,以信息熵作为目标函数,以概率转换定义和要求作为约束条件,将寻找概率转换转化为最优化问题,提出了基于信息熵评价的最优概率转换方法.文献[9]也说明了采用PIC评价的一些劣势.这种方法出现问题的根本原因就是只考虑信度最大的单子命题而没有考虑所有单子命题.程子成等<sup>[10]</sup>研究了融合信息熵的性质,提出了条件支持度与剩余支持度的概念以及一种新的逐步概率转换的算法.这种方法的优点是在没有阈值的情况下得到的结果几乎与文献[9]的方法一致,而且计算较简单,在给定了阈值后能够较好地控制转换

收稿日期:2022-11-23

基金项目:国家自然科学基金(61876074)资助项目.

通信作者:刘邱云(1976—),女,江西铜鼓人,讲师,主要从事不确定性推理与信息融合方面的研究. E-mail: lqyxinxiang@

126.com

带来的高风险性.但是文献[10]没有充分说明参数 $\alpha$ 的含义.文献[11-17]也做了一些研究,但它们的决策效果均不明显.

针对以上问题,本文参照 Pareto 法则,提出了一种能够根据给定冒险程度来计算基本概率分配函数概率转换的新方法.帕累托法则也被称为二八法则,简而言之,帕累托法则就是告诉人们要学会抓主要矛盾,避免在次要的事物上花费太多精力.基于这个思想,本文认为复杂焦元信度的分配取决于其一小部分单子命题,采用在单子命题上的信度作为判断依据,计算出复杂焦元的帕累托元素,根据信度越大获得复杂焦元的信度越大的原则在帕累托元素上进行分配;若单子命题没有信度,则采用平均的方法进行分配.在所有复杂焦元的信度都分配完毕后即可得一个概率转换.

## 1 证据理论基本概念

**定义 1** 设 $\Theta$ 为非空有限集合,称之为识别框架(frame of discernment),记 $2^\Theta$ 为 $\Theta$ 的幂集,即 $\Theta$ 的所有子集,定义映射: $m:2^\Theta \rightarrow [0,1]$ 且满足

$$m(\emptyset) = 0, \sum_{A \subseteq \Theta} m(A) = 1,$$

则称 $m$ 为 $\Theta$ 上的基本概率分配(basic probability assignment)函数,简称 BPA,它也被称为 mass 函数. $A$ 为命题,称 $m(A)$ 的值为 $A$ 的信度,也被称为 mass 值.若 $m(A) > 0$ ,则称 $A$ 为 $m$ 的焦元(focal element),记 $|A|$ 为 $A$ 的基数,即 $A$ 中元素的个数.当 $|A|=1$ 时,称 $A$ 为单子命题,本文用 $\Theta$ 中的元素 $\theta_i$ 表示单子命题;若 $m(A) > 0$ ,且 $|A| \geq 2$ ,则称 $A$ 为复杂焦元.

**定义 2** 设 $m$ 为 $\Theta$ 上的 BPA,定义函数

$$b(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B),$$

称 $b$ 为 $m$ 的信任函数(belief function),其表示相信 $A$ 的程度.

**定义 3** 设 $m$ 为 $\Theta$ 上的 BPA, $b$ 为 $m$ 的信任函数,定义函数

$$P_l(A) = 1 - b(\bar{A}) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B),$$

称 $P_l$ 为 $m$ 的似真度函数(plausible function),表示不怀疑 $A$ 的程度,即 $A$ 可能为真的程度.

显然有 $b(A) \leq P_l(A)$ 对于所有 $A \subseteq \Theta$ 都成立.称区间 $[b(A), P_l(A)]$ 为 $A$ 的信任区间,称 $i_g(A) = P_l(A) - b(A)$ 为对 $A$ 的无知程度. $A$ 的信任区间表

示 $A$ 发生的可能性取值范围,也可认为 $P_l(A)$ 和 $b(A)$ 分别是命题 $A$ 发生的上概率与下概率.

**定义 4** 设 $P$ 为概率函数, $m$ 为 $\Theta$ 上的 BPA, $b$ 与 $P_l$ 分别为 $m$ 的信任函数与似真度函数.若 $P$ 满足

$$b(A) \leq \sum_{\theta_i \in A} P(\theta_i) \leq P_l(A),$$

则称 $P$ 为信任函数 $b$ 的相容概率,也称 $P$ 为 $m$ 的一个概率转换,显然概率转换不是唯一的.

## 2 现有概率转换方法及评价指标

### 2.1 P. Smets 等的概率转换方法

设 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ , $m$ 为 $\Theta$ 上的 BPA,定义函数

$$b_m(\theta_i) = \sum_{\theta_j \in B, B \subseteq \Theta} m(B) / |B|, i = 1, 2, \dots, n,$$

称 $b_m$ 为 $m$ 的 Pignistic<sup>[3]</sup>概率转换.

### 2.2 J. J. Sudano 的概率转换方法

设 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ , $m$ 为 $\Theta$ 上的 BPA, $b$ 为 $m$ 的信任函数, $P_l$ 为 $m$ 的似真度函数,则文献[4-7]的 4 种转换方法如下:

$$P_1(\theta_i) = b(\theta_i) + (1 - \sum_{\theta_j \in \Theta} b(\theta_j)) P_l(\theta_i) / \sum_{\theta_j \in \Theta} P_l(\theta_j),$$

$$P_2(\theta_i) = \sum_{\theta_j \in B, B \subseteq \Theta} (P_l(\theta_i) m(B) / \sum_{\theta_j \in B} P_l(\theta_j)),$$

$$P_3(\theta_i) = \sum_{\theta_j \in B, B \subseteq \Theta} (b(\theta_i) m(B) / \sum_{\theta_j \in B} b(\theta_j)),$$

$$P_4(\theta_i) = \sum_{\theta_j \in B, B \subseteq \Theta} (P_l(\theta_i) m(B) / \sum_{\theta_j \in B} P_l(\theta_j)).$$

### 2.3 J. Dezert 等的概率转换方法

设 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ , $m$ 为 $\Theta$ 上的 BPA,定义函数 $d_s$ 为如下的转换方法<sup>[11]</sup>:

$$d_s(\theta_i) = \sum_{\theta_j \in B} ((m(\theta_i) + \varepsilon) m(B) / (\sum_{\theta_j \in B} m(\theta_j) + \varepsilon |B|)),$$

其中 $\varepsilon$ 为调节参数, $\varepsilon \in [0,1]$

### 2.4 Han Deqiang 等的概率转换方法

Han Deqiang 等<sup>[9]</sup>将寻找概率转换转化成最优解问题,得到了基于信息熵评价的“最优”概率转换.记这种方法为 $U_{\min}$ ,定义如下:

$$\min_P \left\{ - \sum_{i=1}^n P(\theta_i) \log_2 P(\theta_i) \right\},$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} b(B) \leq \sum_{\theta_i \in B} P(\theta_i) \leq P_l(B), B \subseteq \Theta, \\ 0 \leq P(\theta_i) \leq 1, \theta_i \in \Theta, \\ \sum_{\theta_i \in \Theta} P(\theta_i) = 1. \end{cases}$$

## 2.5 程子成等的概率转换方法

程子成等<sup>[10]</sup>研究了信息熵的性质,提出了条件支持度和剩余支持度的概念。

**定义 5** 设  $\Theta$  为识别框架,给定  $C, \theta_i \in C, \forall \theta_j \in C$ , 定义

$$S_C(\theta_j | \theta_i) = \sum_{\theta_i \in A \subseteq C, \theta_j \in A} m(A) / |A|,$$

$$L_C(\theta_j | \theta_i) = \sum_{\theta_j \in A \subseteq C, \theta_i \notin A} m(A) / |A|,$$

称  $S_C(\theta_j | \theta_i)$  与  $L_C(\theta_j | \theta_i)$  分别为  $m$  在  $C$  上提取信息  $\theta_i$  对  $\theta_j$  的条件支持度与剩余支持度。

文献[10]的概率转换方法是以 Pignistic 概率变换为基础,逐步提取子命题的条件支持度,聚焦于剩余支持度大的子命题。

## 2.6 概率转换方法的评价指标

从做决策的角度分析,一个概率转换的不确定性越小越易于做决策:若一个概率函数对所有单元命题的概率都是同一个值(如均匀分布),则认为此时的不确定性最大;若对某个单元命题的概率为 1,则此时不确定性消失。首先采用 Kullback-Leibler 距离来度量概率转换与均匀分布的差异,若差异越大,则不确定性越小<sup>[4]</sup>。

设  $u(\theta_i) = 1/n (i = 1, 2, \dots, n)$  为  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$  上的均匀分布,  $P(\theta_i)$  为  $m$  的概率转换,则  $P$  与  $u$  的 Kullback-Leibler 距离为

$$D(P, u) = \sum_{i=1}^n P(\theta_i) \log_2(P(\theta_i)/u(\theta_i)).$$

$D$  可以刻画  $P$  的不确定性。化简后再标准化即可得如下 PIC<sup>[12]</sup> 函数:

$$f_{\text{PIC}}(P) = \sum_{i=1}^n P(\theta_i) \log_2(P(\theta_i)) / \log_2(n) + 1,$$

当  $P(\theta_i) = 0$  时,记  $0 \log_2 0 = 0$ 。

显然有  $f_{\text{PIC}} + E_H = 1$ , 其中  $E_H$  为信息熵,这说明 PIC 评价与标准信息熵的评价一样,只不过在数值上恰好相反,  $f_{\text{PIC}}$  越大越容易做决策。

但是  $f_{\text{PIC}}$  并不能完全反映一个概率转换的好坏<sup>[9]</sup>,  $f_{\text{PIC}}$  越大只是说明更容易做决策而已,一味地追求  $f_{\text{PIC}}$  最大就有可能产生类似于例 4、例 5 (见 3.1) 的异常情况。产生这种异常情况的原因是:太过于冒进,只追求转换概率最大,没有考虑所有或者大部分单子命题。在采用 PIC 进行评价时,应该还需考虑概率转换的冒险程度。

## 3 基于 Pareto 法则的基本概率分配函数概率转换

### 3.1 现有方法问题分析

**例 1** 设  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ ,  $m$  为  $\Theta$  上的 BPA, 其值分配如下:  $m(\theta_1) = 0.50, m(\theta_2) = 0.02, m(\Theta) = 0.48$ , 则  $m$  的 Pignistic 概率转换为  $b_m(\theta_1) = 0.74, b_m(\theta_2) = 0.26$ 。

从直观来看,  $\theta_1$  相比  $\theta_2$  更有可能为真, 将其转化为概率函数, 也应该是  $\theta_1$  上的概率值比  $\theta_2$  上的概率值要大得多, 而  $b_m(\theta_1)$  的值却只有  $b_m(\theta_2)$  的 3 倍多, 显然是不够的。因此, 在分配时应考虑单子命题的信度。

**例 2** 设  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ ,  $m$  为  $\Theta$  上的 BPA, 其值分配如下:  $m(\theta_1\theta_2) = 0.3, m(\theta_1\theta_2\theta_3) = 0.3, m(\Theta) = 0.4$ 。

在类似这种单子命题的信度为 0 的情况下, 文献[6]方法就完全失效了。

**例 3** 设  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ ,  $m$  为  $\Theta$  上的 BPA, 其值分配如下:  $m(\theta_1) = 0.2, m(\Theta) = 0.8$ 。其文献[6]的概率转换为  $P_3(\theta_1) = 1$ , 其文献[11]的概率转换(其中  $\varepsilon = 0.001$ )如下:

$$d_{\varepsilon_{0.001}}(\theta_1) = 0.9883, d_{\varepsilon_{0.001}}(\theta_2) = 0.0039,$$

$$d_{\varepsilon_{0.001}}(\theta_3) = 0.0039, d_{\varepsilon_{0.001}}(\theta_4) = 0.0039.$$

在零值信度单子命题较多的情况下, 这 2 种转换显然都违背了直觉。因此, 在分配时应考虑信度为 0 的单子命题的数量。

**例 4** 设  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ ,  $m$  为  $\Theta$  上的 BPA, 其值分配如下:  $m(\theta_1) = 0.2, m(\theta_2) = 0.2, m(\Theta) = 0.6$ 。在运用  $U_{\min}$  的方法计算后有 2 个结果:  $P_1(\theta_1) = 0.8, P_1(\theta_2) = 0.2$  和  $P_2(\theta_1) = 0.2, P_2(\theta_2) = 0.8$ 。

出现 2 个转换结果显然不符合直观。因此, 在分配时应考虑单子命题信度相等的情况。

**例 5** 设  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ ,  $m$  为  $\Theta$  上的 BPA, 其值分配如下:  $m(\theta_1) = 0.100\ 01, m(\theta_2) = 0.100\ 00, m(\Theta) = 0.799\ 99$ , 运用  $U_{\min}$  方法计算概率转换如下:  $P(\theta_1) = 0.9, P(\theta_2) = 0.1$ 。

由于在有单子命题信度相近的情况下,  $U_{\min}$  结果是不符合直观的, 所以在分配时应考虑单子命题信度相近的情况。

总之, 复杂焦元的信度分配应该体现其所有单子命题信度的结构。

### 3.2 Pareto 概率转换算法

一个复杂焦元的信度如何分配给它的单子命



题,首先应当考虑其单子命题有没有零值信度,或者说零值信度的单子命题有多少. 本文认为:若零值信度的单子命题很多,超过该复杂焦元基数的 20%,则不能只在其非零值单子命题上分配,应该考虑其所有单子命题. 因此,在这种情况下应采取保守的平均分配,即将复杂焦元的信度平均分配给它的单子命题.

当零值信度的单子命题较少,不超过该复杂焦元基数的 20% 时,本文认为此时零值信度的单子命题对信度分配是无影响的,从而此时就可以采用单子命题的信度作为衡量标准,信度大的单子命题被分配到的信度应该更多,信度小的单子命题被分配到的信度更少或者不分配信度. 对此就需要将单子命题按信度大小排序,选取前面较大的单子命题信度之和占所有单子命题信度之和的 80% 这部分,本文认为这部分能决定复杂焦元的信度分配. 由于还应考虑有信度相同的单子命题的情况,所以应将与被选取命题的信度相等的单子命题选入. 本文称这 2 部分为复杂焦元的帕累托元素,根据帕累托元素的信度按比例分配复杂焦元的信度. 上述的 80% 和 20% 可以针对具体情况进行微调,可引入参数  $1-\alpha$  和  $\beta$  来表示. 每一个符合要求的复杂焦元都可计算出它的帕累托元素.

复杂焦元  $A$  的帕累托元素计算步骤如下:

**Step 1** 将复杂焦元  $A$  的单子命题按信度从大到小排列,设排序结果为  $A = \{\theta_{a_1}, \theta_{a_2}, \dots, \theta_{a_s}\}$ , 则有  $m(\theta_{a_1}) \geq m(\theta_{a_2}) \geq \dots \geq m(\theta_{a_s})$ ;

**Step 2** 计算  $b$  和  $c$ ,

$\min t$ ,

$$\text{s. t. } \begin{cases} \sum_{i=1}^s m(\theta_{a_i})(1-\alpha) \leq \sum_{i=1}^t m(\theta_{a_i}), \\ t=1, 2, \dots, s, \end{cases}$$

记  $t$  的最优解为  $b$ ;

$$g(m(\theta_{a_i})) = \begin{cases} 1, m(\theta_{a_i}) = m(\theta_{a_b}), \\ 0, m(\theta_{a_i}) \neq m(\theta_{a_b}), \end{cases}$$

$$c = \sum_{i=b+1}^s g(m(\theta_{a_i}));$$

**Step 3** 计算  $A$  的帕累托元素  $T(A)$ ,  $d = b + c$ ,  $T(A) = \{\theta_i | i = a_j, j = 1, 2, \dots, d\}$ .

设  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$  为识别框架,  $m$  为  $\Theta$  上的 BPA,  $A$  为  $m$  的复杂焦元, 概率函数  $P_i$  为按下述算法计算得到的一个  $m$  的概率转换, 称之为帕累托 (Pareto) 概率转换,  $\alpha, \beta$  为参数,  $\alpha \in [0, 1], \beta \in [0, 1]$ .

下面给出本文方法的计算步骤:

**Step 1** 计算  $A$  的零值单子命题个数  $|I_A|$ , 其

中  $I_A = \{\theta_i | m(\theta_i) = 0, \theta_i \in A\}$ ;

**Step 2** 判断  $|I_A|$  是否大于  $\beta|A|$ , 若是, 则进入 Step 3, 否则进入 Step 4;

**Step 3** 将  $A$  的信度平均分配给它的单子命题, 即  $m'(\theta_i) \leftarrow m'(\theta_i) + m(A)/|A| (\theta_i \in A)$ ;

**Step 4** 根据帕累托元素计算步骤计算出  $A$  的帕累托元素, 再根据帕累托元素的信度按比例将  $A$  的信度分配给  $A$  的帕累托元素, 即

$$m'(\theta_i) \leftarrow m'(\theta_i) + m(\theta_i)m(A)/\sum_{\theta_j \in T(A)} m(\theta_j)$$

$(\theta_i \in T(A))$ ;

**Step 5** 选取下一个复杂焦元返回 Step 1, 若所有复杂焦元的信度都分配完毕, 则将  $m$  的单子命题原有信度  $m(\theta_i)$  和被分配到的信度  $m'(\theta_i)$  之和赋值给对应的  $P_i(\theta_i)$ , 即  $P_i(\theta_i) \leftarrow m(\theta_i) + m'(\theta_i), i = 1, 2, \dots, n$ .

**定理 1** 经过上述算法计算的  $P_i$  为  $m$  的相容概率.

**证** 设  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ ,  $m$  为  $\Theta$  上的 BPA,  $A$  为  $m$  的复杂焦元,  $P_i$  为  $m$  根据 3.2 节描述的算法计算得到的一个函数,  $\mu_{\theta_i}(A)$  为复杂焦元  $A$  的信度分配到  $\theta_i$  上的权重值, 显然有:  $\forall \theta_i \in \Theta, \forall A \subseteq \Theta, |A| \geq 2, 0 \leq \mu_{\theta_i}(A) \leq 1$ , 当  $\theta_i \notin A$  时,  $\mu_{\theta_i}(A) = 0$ ; 特别地, 可能  $\exists \theta_i \in A, \mu_{\theta_i}(A) = 0$ ,

$$\sum_{\theta_i: \theta_i \in \Theta} \mu_{\theta_i}(A)m(A) = \sum_{\theta_i: \theta_i \in A} \mu_{\theta_i}(A)m(A) = m(A),$$

则  $P_i(\theta_i) = m(\theta_i) + \sum_{\theta_i \in A, A \subseteq \Theta} \mu_{\theta_i}(A)m(A)$ . 当  $|B| = 1$

时, 显然成立; 当  $|B| \geq 2$  时, 记  $m(A)|_B = \sum_{\theta_i \in B} \mu_{\theta_i}(A) \cdot m(A)$ , 其中

$$b(B) = \sum_{\theta_i \in B} m(\theta_i) + \sum_{A \subseteq B} m(A),$$

$$P_i(B) = \sum_{\theta_i \in B} m(\theta_i) + \sum_{A \subseteq B} m(A) + \sum_{B \subseteq A, A \neq B} m(A) +$$

$$\sum_{A \cap B \neq \emptyset, A \not\subseteq B, B \not\subseteq A} m(A),$$

$$\sum_{\theta_i \in B} P_i(\theta_i) = \sum_{\theta_i \in B} m(\theta_i) + \sum_{\theta_i: \theta_i \in B, A: \theta_i \in A \subseteq \Theta} \mu_{\theta_i}(A) \cdot m(A)$$

$$= \sum_{\theta_i \in B} m(\theta_i) + \sum_{A \subseteq B} m(A)|_B + \sum_{B \subseteq A, A \neq B} m(A)|_B +$$

$$\sum_{A \cap B \neq \emptyset, A \not\subseteq B, B \not\subseteq A} m(A)|_B.$$

当  $A \subseteq B$  时,  $m(A)|_B = m(A)$ ; 当  $A \not\subseteq B$  时,  $0 \leq m(A)|_B \leq$

$$m(A) \text{ 可推出 } 0 \leq \sum_{B \subseteq A, A \neq B} m(A)|_B \leq \sum_{B \subseteq A, A \neq B} m(A), 0 \leq$$

$$\sum_{A \cap B \neq \emptyset, A \not\subseteq B, B \not\subseteq A} m(A)|_B \leq \sum_{A \cap B \neq \emptyset, A \not\subseteq B, B \not\subseteq A} m(A). \text{ 故有}$$

$$b(B) \leq \sum_{\theta_i \in B} P_i(\theta_i) \leq P_i(B).$$

显然,上述证明不仅证明了本文的方法为概率转换,而且对于其他方法,只要没有将复杂焦元的信度分配到它的非单子命题上,它们就都满足概率转换的定义。

3.3 参数  $\alpha, \beta$  的意义

给出下面 2 个例子来说明参数  $\alpha$  和  $\beta$  的含义。

**例 6** 设  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8, \theta_9\}$ ,  $m$  为  $\Theta$  上的 BPA, 其值分配如下:

$m(\theta_1) = 0.09, m(\theta_2) = 0.08, m(\theta_3) = 0.07, m(\theta_4) = 0.06, m(\theta_5) = 0.05, m(\theta_6) = 0.04, m(\theta_7) = 0.03, m(\theta_8) = 0.02, m(\theta_9) = 0.01, m(\theta_1\theta_2) = 0.03, m(\theta_1\theta_3) = 0.03, m(\theta_1\theta_4) = 0.03, m(\theta_1\theta_5) = 0.03, m(\theta_1\theta_6) = 0.03, m(\theta_1\theta_7) = 0.04, m(\theta_1\theta_8) = 0.04, m(\theta_1\theta_9) = 0.04, m(\theta_1\theta_2\theta_3) = 0.04, m(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4) = 0.04, m(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5) = 0.04, m(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5\theta_6) = 0.04, m(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5\theta_6\theta_7) = 0.04, m(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5\theta_6\theta_7\theta_8) = 0.04, m(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5\theta_6\theta_7\theta_8\theta_9) = 0.04.$

**例 7** 设  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8, \theta_9, \theta_{10}\}$ ,  $m$  为  $\Theta$  上的 BPA, 其值分配如下:

$m(\theta_1) = 0.07, m(\theta_2) = 0.06, m(\theta_3) = 0.05, m(\theta_4) = 0.04, m(\theta_5) = 0.03, m(\theta_6) = m(\theta_7) = m(\theta_8) = m(\theta_9) = m(\theta_{10}) = 0, m(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_6) = 0.05, m(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5) = 0.05, m(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_6\theta_7) = 0.05, m(\theta_1\theta_2\theta_6\theta_7\theta_8) = 0.05, m(\theta_1\theta_6\theta_7\theta_8\theta_9) = 0.05, m(\theta_6\theta_7\theta_8\theta_9\theta_{10}) = 0.05, m(\theta_1\theta_6\theta_7\theta_8\theta_9\theta_{10}) = 0.05, m(\theta_1\theta_2\theta_6\theta_7\theta_8\theta_9\theta_{10}) = 0.05, m(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_6\theta_7\theta_8\theta_9\theta_{10}) = 0.05, m(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_6\theta_7\theta_8\theta_9\theta_{10}) = 0.05, m(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5\theta_6) = 0.05, m(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5\theta_6\theta_7) = 0.05, m(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5\theta_6\theta_7\theta_8) = 0.05, m(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5\theta_6\theta_7\theta_8\theta_9) = 0.05, m(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5\theta_6\theta_7\theta_8\theta_9\theta_{10}) = 0.05.$

以  $\beta = 0, \alpha = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$  分别计算例 6 的帕累托概率转换的 PIC 值, 得到图 1。分别以  $\alpha = 0, 0.2, 0.5, 0.8, \beta = 0, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90, 0.99$  计算例 7 的帕累托概率转换的 PIC 值, 得到图 2。

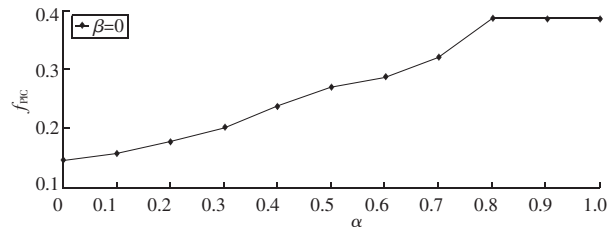


图 1 参数  $\alpha$  与  $f_{PIC}$  的关系

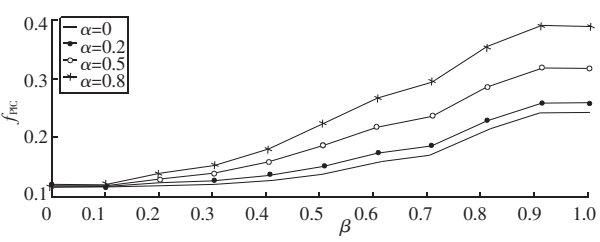


图 2 参数  $\beta$  与  $f_{PIC}$  的关系

由图 1 可知,  $\alpha$  越大,  $f_{PIC}$  值就越大。这说明  $\alpha$  能够控制转换的效果,  $\alpha$  越大最后得到的转换效果越好。从算法结构来看,  $1 - \alpha$  可以理解为复杂焦元  $A$  的帕累托元素的信度之和占  $A$  所有单子命题信度之和的比例, 此占比越小, 成为帕累托元素的单子命题就越少;  $\alpha$  可以理解为复杂焦元  $A$  的非帕累托元素的信度之和占  $A$  所有单子命题信度之和的比例, 这个占比越大, 成为帕累托元素的单子命题就越少, 复杂焦元  $A$  的信度分配就越集中在信度较大的那部分单子命题上。从这个角度分析, 可以用  $\alpha$  来衡量冒险程度,  $\alpha$  越大越冒险。当然, 对于所有单子命题信度都为 0 的 BPA,  $\alpha$  取任意值都对转换结果无影响, 也就无法衡量冒险程度了。为了避免一些反常情况(如例 5),  $\alpha$  一般不能大于 0.5。由图 2 知,  $\beta$  也可以控制转换的效果,  $\beta$  越大转换的效果越好。从算法结构来分析, 可将  $\beta$  理解为复杂焦元  $A$  的零值单子命题占比。  $\beta$  越大, 分配越集中, 重要的命题越能突出。同样也可以用  $\beta$  来衡量冒险程度,  $\beta$  越大越冒险。对于没有单子命题信度为 0 的情况(如例 6),  $\beta$  取任意值都对转换结果无影响, 也就无法衡量冒险程度了。  $\beta$  一般取不大于 0.5 的值, 若取大于 0.5 的值, 则在分配复杂焦元信度时就有可能出现不符合直观的分配。

4 实例分析

运用 Pareto 概率转换方法, 取  $\alpha = 0.2, \beta = 0.2$  对 3.1 节中的例 1 ~ 5 进行概率转换计算, 计算结果如表 1 所示。

表 1 Pareto 概率转换结果

算例	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$
例 1	0.98	0.02			
例 2	0.35	0.35	0.20	0.10	
例 3	0.36	0.16	0.16	0.16	0.16
例 4	0.50	0.50			
例 5	0.500 025	0.499 975			

5 个概率转换都得到了符合直觉的结果. 其中例 2 与例 3 的结果与 Piginistic 概率转换的结果相同,这是因为本文的方法在单子命题信度大部分或者全部为 0 时失去了复杂焦元的帕累托元素衡量标准,本文只能采取保守的平均思想进行分配,所幸大部分实际情况都是在单子命题上都有信度的情况. 而例 5 的结果比程子成等<sup>[10]</sup>的方法效果更好.

**例 8<sup>[5]</sup>** 设  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ ,  $m$  为  $\Theta$  上的 BPA,其值分配如下:  
 $m(\theta_1) = 0.16, m(\theta_2) = 0.14, m(\theta_3) = 0.01, m(\theta_4) = 0.02, m(\Theta) = 0.08, m(\theta_1\theta_2) = 0.20, m(\theta_1\theta_3) = 0.09, m(\theta_1\theta_4) = 0.04, m(\theta_2\theta_3) = 0.04, m(\theta_2\theta_4) =$

$0.02, m(\theta_3\theta_4) = 0.01, m(\theta_1\theta_2\theta_3) = 0.10, m(\theta_1\theta_2\theta_4) = 0.03, m(\theta_1\theta_3\theta_4) = 0.03, m(\theta_2\theta_3\theta_4) = 0.03.$

**例 9<sup>[12]</sup>** 设  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ ,  $m$  为  $\Theta$  上的 BPA,其值分配如下:

$m(\theta_1) = 0.05, m(\theta_2) = m(\theta_3) = m(\theta_4) = m(\Theta) = 0, m(\theta_1\theta_2) = 0.39, m(\theta_1\theta_3) = 0.19, m(\theta_1\theta_4) = 0.18, m(\theta_2\theta_3) = 0.04, m(\theta_2\theta_4) = 0.02, m(\theta_3\theta_4) = 0.01, m(\theta_1\theta_2\theta_3) = 0.04, m(\theta_1\theta_2\theta_4) = 0.02, m(\theta_1\theta_3\theta_4) = 0.03, m(\theta_2\theta_3\theta_4) = 0.03.$

分别对其进行概率转换计算,对比本文方法与其他方法,得到表 2 和表 3.

表 2 例 8 转换结果对比

方法	概率转换函数	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$f_{PIC}$
已有方法	$b_m^{[3]}$	0.398 3	0.343 3	0.160 7	0.115 1	0.052 6
	$C_p^{[13]}$	0.398 9	0.343 3	0.160 7	0.115 1	0.052 6
	$P_1^{[7]}$	0.402 1	0.352 3	0.139 4	0.106 2	0.100 7
	$P_2^{[7]}$	0.454 4	0.360 9	0.117 6	0.076 1	0.163 8
	$P_4^{[7]}$	0.474 9	0.374 9	0.090 4	0.059 8	0.201 4
	$M_p^{[14]}$	0.501 3	0.378 8	0.037 5	0.082 5	0.247 7
	$d_{s,0.001}^{[11]}$	0.516 2	0.404 3	0.031 9	0.047 7	0.305 8
	$P_3^{[7]}$	0.517 6	0.405 1	0.030 3	0.047 0	0.310 0
	$d_{s0}^{[11]}$	0.517 6	0.405 1	0.030 3	0.047 0	0.310 0
	$I_p^{[15]}$	0.526 4	0.398 9	0.040 7	0.034 0	0.315 0
	$P_s^{[12]}$	0.540 3	0.388 3	0.031 6	0.039 3	0.324 7
	$P_{B1}^{[8]}$	0.541 9	0.399 8	0.024 3	0.034 0	0.348 0
	$P_{B2}^{[8]}$	0.557 8	0.384 2	0.022 6	0.035 3	0.352 9
	$P_{B3}^{[8]}$	0.591 6	0.355 0	0.020 6	0.003 2	0.372 3
本文方法	$P_{t0.2}$	0.538 7	0.421 3	0.013 3	0.026 7	0.385 7
	$P_{t0.4}$	0.538 7	0.421 3	0.010 0	0.030 0	0.387 8
	$P_{t0.5}$	0.646 0	0.314 0	0.010 0	0.030 0	0.424 9

注: $P_s$ 迭代 5 次, $P_{B3}$ 初始值取信任函数,迭代 3 次, $P_{t0.2}$ 表示  $\alpha, \beta$  均取 0.2. 下文同.

从表 2 可以看出:3 个参数取值的 Pareto 概率转换在  $f_{PIC}$  值上都超过其他方法,而且  $\alpha = 0.2$  的 Pareto 概率转换就已经在  $f_{PIC}$  值上超过其他方法. 这说明在这个例子中以一个较小的冒险程度就能得到优于其他方法的结果. 因此,本文提出的方法较其他方法略好. 在表 3 中, $\beta = 0.2$  的 Pareto 概率转换与文献[3]的方法一样. 若增加冒险程度到  $\beta = 0.5$  则可得得到优于其他方法的结果,这说明:即使单子命题大部分为 0,本文的方法通过调整冒险程度参数  $\beta$  也能得到一个较好的结果.

采用 MATLAB 软件随机生成识别框架基数为 5,分别满足下列要求的基本概率赋值函数各 100 个:1)所有单子命题只有 0 个信度为 0;2)所有单子命题只有 1 个信度为 0;3)所有单子命题只有 2 个信度为 0;4)所有单子命题只有 3 个信度为 0.

对其进行概率转换再计算  $f_{PIC}$  值,对比本文方法与其他方法中较优的  $P_{B2}, P_{B3}$  方法和文献[3]的方法,分别得图 3~6,图中横坐标  $n$  为实验次数.

由图 3~6 可知:在 PIC 评价体系下,本文提出的 Pareto 概率转换方法在一般情况下基本都能超过

$P_{B2}$ 、 $P_{B3}$ 方法,而该2种方法是其他方法中较优的.因此,本文方法比其他的方法更好.且零值单子命题越少效果越好.从计算步骤来分析,本文方法避

免了前文所提到的一些问题,同时又在一般性实验中有较好的效果,这说明本文提出的方法是行之有效的.

表3 例9转换结果对比

方法	概率转换函数	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$f_{PIC}$
已有方法	$P_3^{[7]}$				失效	
	$P_S^{[12]}$				失效	
	$P_{B1}^{[8]}$				失效	
	$d_{i0}^{[11]}$				失效	
	$P_1^{[7]}$	0.463 0	0.247 8	0.156 1	0.133 1	0.090 7
	$b_m^{[3]}$	0.460 0	0.255 0	0.153 3	0.131 7	0.091 0
	$C_P^{[13]}$	0.460 0	0.255 0	0.153 3	0.131 7	0.091 0
	$M_P^{[14]}$	0.571 7	0.235 0	0.108 3	0.085 0	0.199 1
	$P_2^{[7]}$	0.616 1	0.216 0	0.096 0	0.071 9	0.247 1
	$P_{B2}^{[8]}$	0.625 5	0.210 9	0.093 6	0.070 0	0.257 2
	$P_4^{[7]}$	0.636 8	0.204 7	0.090 9	0.067 7	0.269 8
	$I_P^{[15]}$	0.763 6	0.147 6	0.054 4	0.034 4	0.450 0
	$P_{B3}^{[8]}$	0.893 9	0.073 8	0.022 7	0.009 5	0.694 8
本文方法	$P_{i0.2}$	0.460 0	0.255 0	0.153 3	0.131 7	0.091 0
	$P_{i0.5}$	0.840 0	0.060 0	0.058 3	0.041 7	0.557 4

注: $P_{B3}$ 初始值取似真度函数,迭代3次.

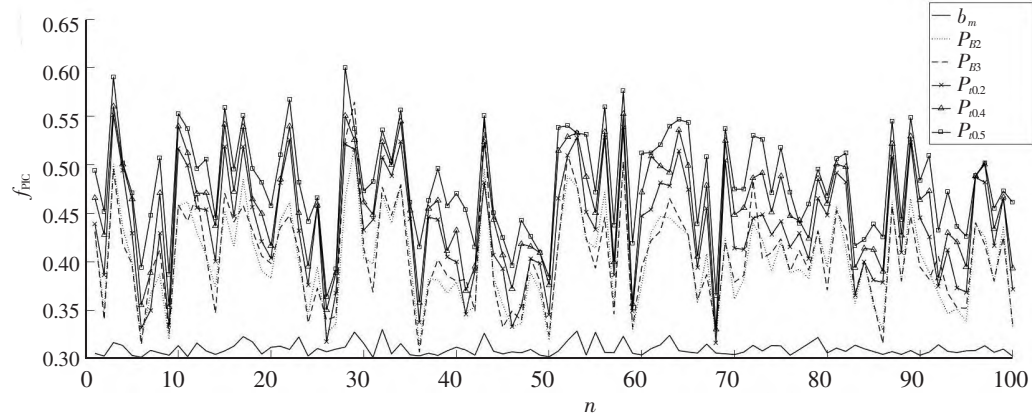


图3 所有单子命题只有0个信度为0

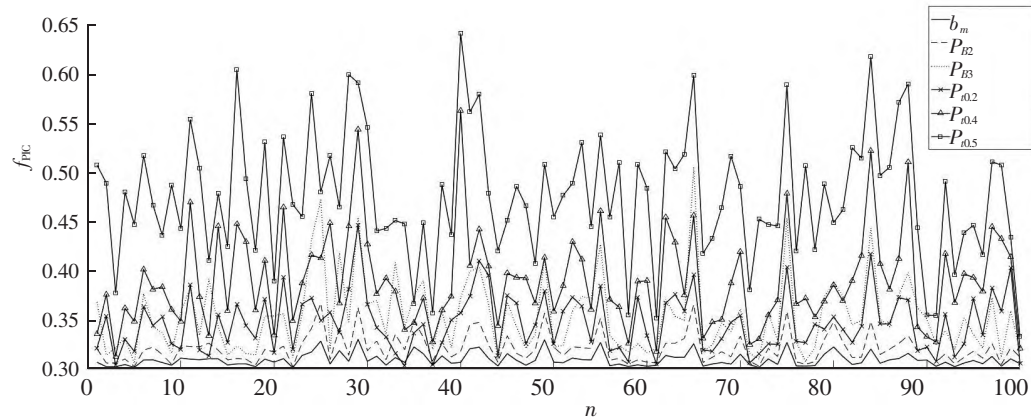


图4 所有单子命题只有1个信度为0



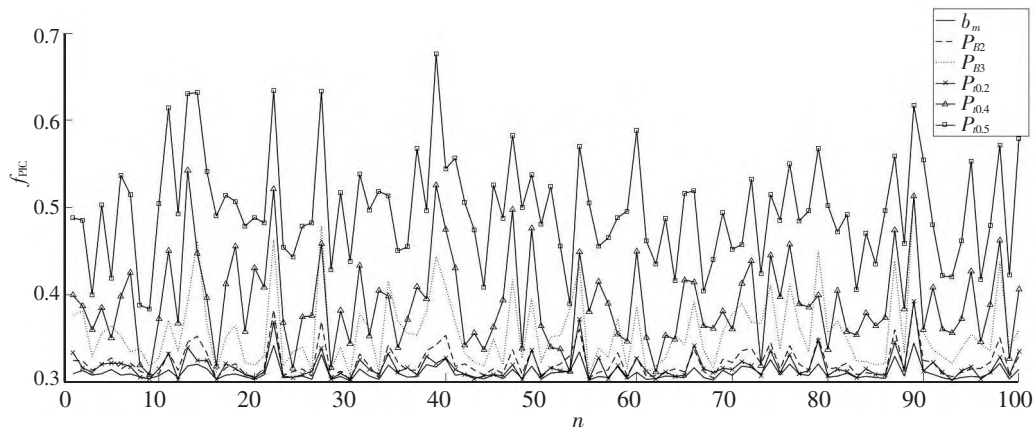


图5 所有单子命题只有2个信度为0

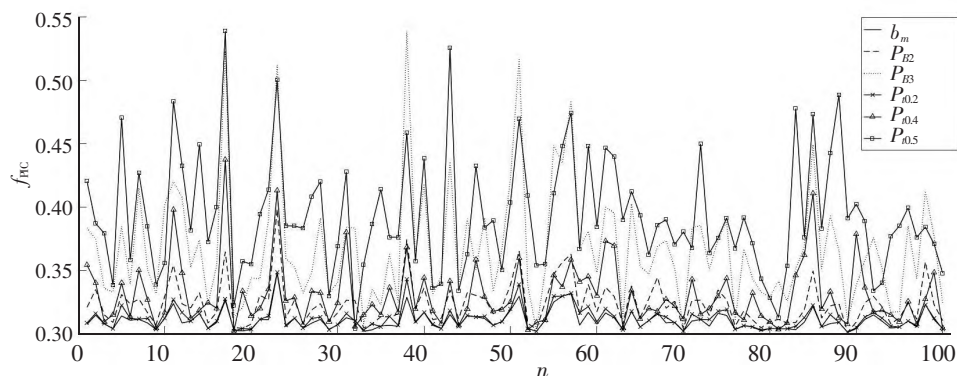


图6 所有单子命题只有3个信度为0

## 5 总结

本文研究了在DS证据理论中的信任函数概率转换问题,基于帕累托法则,认为复杂焦元信度的分配应该依赖于其单子命题的信度,以此作为判断依据,判断焦元的结构,对于不同的结构进行不同的分配.设置了2个参数,对2种典型的焦元结构的信度分配方法进行控制,研究了参数的意义及取值范围.本文提出的方法不仅能够更加突出信度大的单子命题,而且弥补了PIC单独评价所带来的缺陷.本文设计出的新方法在调节参数后均能获得较优的结果.

## 6 参考文献

- [1] SHAFER G. A mathematical theory of evidence [M]. Princeton: Princeton University Press, 1976.
- [2] 韩德强,杨艺,韩崇昭. DS证据理论研究进展及相关问题探讨[J]. 控制与决策, 2014, 29(1): 1-11.
- [3] SMETS P, KENNES R. The transferable belief model [J]. Artificial Intelligence, 1994, 66(2): 191-234.
- [4] SUDANO J J. Pignistic probability transforms for mixes of low- and high-probability events [J]. Computer Science, 2015(1): 23-27.
- [5] SUDANO J J. The system probability information content (PIC) relationship to contributing components, combining independent multi-source beliefs, hybrid and pedigree pignistic probabilities [C] // Proceedings of the Fifth International Conference on Information Fusion, July 8-11, 2022, Loews Annapolis Hotel, Annapolis, Maryland. New York: IEEE, 2002, 2: 1277-1283.
- [6] SUDANO J J. Equivalence between belief theories and Naive Bayesian fusion for systems with independent evidential data: part II, the example [C] // Proceedings of the Sixth International Conference of Information Fusion, July 8-11, 2003, Radisson Hotel, Cairns, Queensland. New York: IEEE, 2003, 2: 1357-1364.
- [7] SUDANO J J. Yet another paradigm illustrating evidence fusion (YAPIEF) [C] // Proceedings of the 9th International Conference on Information Fusion, July 10-13, 2006, Florence. New York: IEEE, 2006, 301783.
- [8] 潘巍,王阳生,杨宏戟. Pignistic 概率转换算法设计



- [J]. 计算机工程, 2005, 31(4): 20-22, 25.
- [9] HAN Deqiang, DEZERT J, HAN Chongzhao, et al. Is entropy enough to evaluate the probability transformation approach of belief function? [C] // Proceedings of the 13th International Conference on Information Fusion, July 26-29, 2010, The University of Edinburgh, Edinburgh, Scotland. New York: IEEE, 2010, 4: 37-43.
- [10] 程子成, 吴根秀, 宋姝婷. 基于融合信息熵性质的信任函数概率逼近 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2014, 38(5): 534-538.
- [11] DEZERT J, SMARANDACHE F. A new probabilistic transformation of belief mass assignment [C] // Proceedings of the 11th International Conference on Information Fusion, June 30-July 3, 2008, University of Cologne, Karlsruhe, North Rhine-Westphalia. New York: IEEE, 2008: 1410-1417.
- [12] SUDANO J J. Belief fusion, pignistic probabilities, and information content in fusing tracking attributes [C] // Proceedings of the IEEE 2004 Radar Conference, April 26-29, 2004, Wyndham Philadelphia at Franklin Plaza, Philadelphia, Pennsylvania. New York: IEEE, 2004: 218-224.
- [13] JIANG Wen, HUANG Chan, DENG Xinyang. A new probability transformation method based on a correlation coefficient of belief functions [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2019, 34(6): 1337-1347.
- [14] HUANG Chongru, MI Xiangjun, KANG Bingyi. Basic probability assignment to probability distribution function based on the Shapley value approach [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2021, 36(8): 4210-4236.
- [15] DENG Zhan, WANG Jianyu. A novel decision probability transformation method based on belief interval [J]. Knowledge-Based Systems, 2020, 208: 106427.
- [16] 周千里, 邓勇. 基于量子演化的信度函数概率转换 [J]. 航空学报, 2022, 43(S1): 182-192.
- [17] CHEN Luyuan, DENG Yong, CHEONG Kanghao. Probability transformation of mass function: a weighted network method based on the ordered visibility graph [J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2021, 105: 104438.

## The Probability Transformation of BPA Based on Pareto Principle

WANG Zhaohui, LIU Qiuyun\*, WU Genxiu, ZHU Hongxiang

(School of Mathematics and Statistics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

**Abstract:** Based on the Pareto Principle, it is believed that the distribution of belief value of complex focal elements should depend on the belief value of its singleton propositions. A larger belief value can better determine the distribution of complex focal elements, and a zero trust value can also affect the distribution of complex focal elements. The complex focal elements are divided into two types of structures, one is that the singleton proposition has no zero value, and the other is that the singleton proposition has zero value. For the former, the Pareto elements of the complex focal elements are found, and only the Pareto elements are allocated according to their belief value weights, which avoids some abnormal situations and highlights the singleton propositions with large belief values. For the latter, the method of ignoring a part or averaging is used to allocate, two parameters are set, which can control the risk degree of focal element allocation and adjust the effect of transformation. The new method is proposed to calculate the probability transition of basic probability assignment function according to the given risk degree. Finally, the effectiveness of the method is verified by example analysis.

**Key words:** basic probability assignment function; probability transformation; Pareto principle; decision-making

(责任编辑: 曾剑锋)