徐宜会,刘晓兰,李艳芳,等. 复域非线性偏微 q-差分方程的超越解[J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2023,47(4):331-335.

XU Yihui,LIU Xiaolan,LI Yanfang,et al. The transcendental solutions of several complex nonlinear partial differential q-difference equations[J]. Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science),2023,47(4):331-335.

文章编号:1000-5862(2023)04-0331-05

复域非线性偏微 q-差分方程的超越解

徐宜会,刘晓兰,李艳芳,徐洪焱*

(宿迁学院文理学院,江苏 宿迁 223800)

摘要: 该文利用 Nevanlinna 值分布理论,主要讨论了复域非线性偏微 q-差分方程的解,得到了几类 Fermat 型偏微 q-差分方程的超越整函数解的存在性条件与形式,并举例说明方程解的形式是准确的.

关键词: Nevanlinna 理论; 偏微 q-差分方程; 超越; Fermat 型

中图分类号: TP 311 **文献标志码:** A **DOI:** 10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2023.04.01

0 引言及相关结果

1929 年,芬兰数学家 R. Nevanlinna 建立了亚纯函数值分布理论[1-3]. 经过近百年的发展,Nevanlinna 值分布理论已成为研究亚纯函数的主要工具,广泛渗透到许多研究分支中,如复域微分方程、差分方程、信号控制等. 文献[4-5]分别独立地建立了亚纯函数的 Nevanlinna 差分模拟结果,借助于这些结果,复域差分方程得到了快速的发展[6-15].

文献[16-18]分别讨论了几类复域微差分方程

$$f'^2(z)+f^2(z+c)=1, \tag{1}$$

$$f'^2(z)+(f(z+c)-f(z))^2=1 \tag{2}$$

的整函数解,并指出:方程(1)的有限级超越整函数解必须为 $f(z)=\sin(z\pm B\mathrm{i})$,其中 B 是常数,$c=2k\pi$ 或 $c=(2k+1)\pi$;方程(2)的有限级超越整函数解必须为 $f(z)=12\sin(2z+B\mathrm{i})$,其中 $c=(2k+1)\pi$,k 为整数,B 为常数.

文献[18]将上述结果推广到复域微 q-差分方程

$$f'^2(z)+f^2(qz)=1, \tag{3}$$

得到如下定理:

定理 A[18] 方程(3)的有限级超越整函数解 $f(z)$ 满足 $f(z)=\sin(z+B)$,当 $q=1$ 时,$f(z)=\sin(z+k\pi)$,当 $q=-1$ 时,$f(z)=-\sin(z+k\pi+\pi/2)$,当 $q\neq\pm1$ 时,方程(3)无有限级超越整函数解.

文献[19]利用多变量 Nevanlinna 差分模拟理论,研究了 Fermat 型偏微差分方程的整函数解,将方程(1)推广到双变量的情形,得到如下定理:

定理 B[19] 令 $c=(c_1,c_2)\in\mathbf{C}^2$,则偏微差分方程

$$(\partial f(z_1,z_2)/\partial z_1)^2+f^2(z_1+c_1,z_2+c_2)=1$$

存在有限级超越整函数解必须具有形式 $f(z_1,z_2)=\sin(Az_1+B)$,其中 A、B 是常数且满足 $Ae^{iAc_1}=1$. 特别地,当 $c_1=0$ 时,$f(z_1,z_2)=\sin(z_1+B)$.

由定理 A 与定理 B,自然提出问题:在多变量情形下,如何刻画方程(3)的超越整函数解的形式?

1 主要结果与举例

针对上述问题,本文主要研究 Fermat 型偏微 q-差分方程

$$(\partial f(z_1,z_2)/\partial z_1)^2+(f(q_1z_1,q_2z_2))^2=1, \tag{4}$$

$$(\partial f(z_1,z_2)/\partial z_1)^2+(\alpha f(q_1z_1,q_2z_2)-\beta f(z_1,z_2))^2=1 \tag{5}$$

的解的存在性及其形式,其中 α、β、q_1、q_2 为 $\mathbf{C}$ 上的复常数. 为了方便,本文均记 $z=(z_1,z_2)$,$q=(q_1,q_2)\in\mathbf{C}^2$,以及 $qz=(q_1z_1,q_2z_2)$.

定理 1 设 $q_1q_2\neq0$,若偏微 q-差分方程(4)具

收稿日期:2023-06-05

基金项目:国家自然科学基金(12161074)资助项目.

通信作者:徐洪焱(1980—),男,江西乐平人,教授,博士,主要从事复分析理论及应用研究. E-mail:xhyhhh@126.com

有有限级超越整函数解 $f(z)$,则 $q_1=\pm1$ 且 $f(z)$ 满足以下情况之一:

1) 当 $q_1=-1$, $|q_2|\neq 1$ 时, $f(z)=\pm(e^{iz_1+b}-e^{-iz_1-b})/(2i)$, $b\in\mathbf{C}$; 当 $q_1=-1$, $|q_2|=1$ 时, $f(z)=\pm(e^{iz_1+\varphi_0(z_2)+b_0}-e^{-iz_1-\varphi_0(z_2)-b_0})/(2i)$,其中 b_0 为常数,在上式取正时, $b_0=k\pi i$,在上式取负时 $b_0=\pi i/2+k\pi i$, $k\in\mathbf{Z}$, $\varphi_0(z_2)$ 为形如 $\varphi_0(z_2)=\sum_{j=1}^{s}b_{m_j}z_2^{m_j}$ 的多项式,且满足 $q_2^{m_j}=-1$, $j=1,2,\cdots,s$.

2) 当 $q_1=1$, $|q_2|=1$ 时, $f(z)=(e^{iz_1+\varphi_0(z_2)+b_0}-e^{-iz_1-\varphi_0(z_2)-b_0})/(2i)$,其中 b_0 为常数, $\varphi_0(z_2)$ 形如定理 1 的 1) 中所述,满足 $q_2^{m_j}=1$, $j=1,2,\cdots,s$.

下面例子显示在定理 1 中解的形式是准确的.

例 1 令 $f(z)=-(e^{iz_1+z_2^4+z_2^{12}}+e^{-iz_1-z_2^4-z_2^{12}})/2$,则 $f(z)$ 满足方程(4),其中 $q_1=-1$, $q_2=e^{\pi i/4}$.

例 2 令 $f(z)=(e^{iz_1+z_2^3+z_2^6}-e^{-iz_1-z_2^3-z_2^6})/(2i)$,则 $f(z)$ 满足方程(4),其中 $q_1=1$, $q_2=e^{2\pi i/3}$.

由定理 1 易得如下推论:

推论 1 设 $q_1q_2\neq0$, $q_1\neq\pm1$,则偏微 q-差分方程(4)无有限级超越整函数解.

定理 2 设 $q_1q_2\neq0$, $|\beta/\alpha|\neq1$,若方程(5)具有有限级超越整函数解 $f(z)$,则 $q_1=\pm1$ 且 $f(z)$ 具有以下形式之一:

1) $f(z)=-(e^{-i(\beta+\alpha)z_1+\psi_1(z_2)+k\pi i}-e^{i(\beta+\alpha)z_1-\psi_1(z_2)-k\pi i})/(2i(\beta+\alpha))+d_mz_2^m$,其中 $d_m=0$ 或者 $d_m\neq0$, $q_2^m=\beta/\alpha$,以及当 $|q_2|\neq1$ 时, $\psi_1(z_2)=0$,当 $|q_2|=1$ 时, $\psi_1(z_2)=\sum_{j=1}^{s}b_{m_j}z_2^{m_j}$, $q_2^{m_j}=-1$, $j=1,2,\cdots,s$.

2) $f(z)=-(e^{-i(\beta-\alpha)z_1+\psi_1(z_2)+\pi i/2+k\pi i}-e^{i(\beta-\alpha)z_1-\psi_1(z_2)-\pi i/2-k\pi i})/(2i(\beta-\alpha))+d_mz_2^m$,其中 d_m, $\psi_1(z_2)$ 如定理 2 的 1) 中所述.

3) $f(z)=-(e^{-i(\beta-\alpha)z_1+\psi_1(z_2)+b_0}-e^{i(\beta-\alpha)z_1-\psi_1(z_2)-b_0})/(2i\cdot(\beta-\alpha))+d_mz_2{}^m$,其中 b_0 为常数, d_m 如定理 2 的 1) 中所述,以及当 $|q_2|\neq1$ 时, $\psi_1(z_2)=0$,当 $|q_2|=1$ 时, $\psi_1(z_2)=\sum_{j=1}^{s}b_{m_j}z_2^{m_j}$, $q_2^{m_j}=1$, $j=1,2,\cdots,s$.

下面例子显示在定理 2 中解的形式是准确的.

例 3 令 $f(z)=(e^{(1-i)z_1+z_2^2}-e^{(i-1)z_1-z_2^2})/(2(1-i))+dz_2$, $d\in\mathbf{C}$,则 $f(z)$ 满足方程(4),其中 $\alpha=1$, $\beta=i$, $q_1=-1$, $q_2=i$.

例 4 令 $f(z)=-(e^{-iz_1}+e^{iz_1})/2+3z_2/2$,则 $f(z)$ 满足方程(5),其中 $\alpha=2$, $\beta=3$, $q_1=-1$, $q_2=3/2$.

由定理 2 易得如下推论:

推论 2 设 $q_1q_2\neq0$, $q_1\neq\pm1$, $|\beta/\alpha|\neq1$,则偏微 q-差分方程(5)无有限级超越整函数解.

2 定理 1 的证明

先介绍几个引理.

引理 1[20-21] 对于在 $\mathbf{C}^n$ 上的整函数 F, $F(0)\neq0$ 且 $\rho(n_F)=\rho<\infty$,存在正则函数 f_F 与函数 $g_F\in\mathbf{C}^n$,有 $F(z)=f_F(z)e^{g_F(z)}$. 特别地,若 $n=1$,则 f_F 为在 Weieratrass 定理中的标准积.

注 1 $\rho(n_F)$ 是零点计数 F 的阶数.

引理 2[22] 若 g 与 h 为复平面 $\mathbf{C}$ 上的整函数且 $g(h)$ 为有限级整函数,则

1) h 为多项式, g 为有限级整函数;

2) h 为非多项式的有限级整函数, g 为零级超越整函数.

引理 3[23] 设 $f_j(\neq0)$ $(j=1,2,3)$ 是 $\mathbf{C}^m$ 上的亚纯函数, f_1 为非常数. 若 $f_1+f_2+f_3=1$ 以及

$$\sum_{j=1}^{3}\{N_2(r,1/f_j)+2\overline{N}(r,f_j)\}<\lambda T(r,f_1)+O(\log^+T(r,f_1))$$

成立,至多除去关于 r 的对数测度为有限集合,这里 $\lambda<1$ 是一个正数. 若 $\lambda<1$, $T(r)=\max_{1\leqslant j\leqslant3}\{T(r,f_j)\}$,则 $f_2=1$ 或 $f_3=1$.

注 2 $N_2(r,1/f)$ 是在 $|z|\leqslant r$ 中 f 的零点计数函数,单级零点计 1 次,重级零点计 2 次.

定理 1 的证明 假设方程(4)具有有限级超越整函数解 $f(z)$. 方程(4)在因式分解后可化为

$$(\partial f/\partial z_1+if(q_1z_1,q_2z_2))(\partial f/\partial z_1-if(q_1z_1,q_2z_2))=1.$$

由 $f(z)$ 为整函数知 $\partial f/\partial z_1+if(q_1z_1,q_2z_2)$ 与 $\partial f/\partial z_1-if(q_1z_1,q_2z_2)$ 没有任何极点与零点. 由引理 1 与引理 2 知,存在非常数多项式 $h(z)$,使得

$$\partial f/\partial z_1=(e^h+e^{-h})/2,\ f(qz)=(e^h-e^{-h})/(2i).\tag{6}$$

否则,若 $h(z)$ 为常数,由式(6)的第 2 式可知 $f(z)$ 为常数,与 $f(z)$ 超越整函数矛盾. 由式(6)简单计算可得

$$\partial f(qz)/\partial z_1=(1/q_1)((e^h+e^{-h})/(2i))(\partial h/\partial z_1)=(e^{h(qz)}+e^{-h(qz)})/2,\tag{7}$$

即

$$-(i/q_1)(\partial h/\partial z_1)e^{h(z)+h(qz)}-(i/q_1)(\partial h/\partial z_1)\cdot e^{h(qz)-h(z)}-e^{2h(qz)}\equiv1.\tag{8}$$

分 2 种情形进行讨论.

情形 1 若 $\partial h/\partial z_1\equiv0$,即 $h=h(z_2)$,则结合式(8)知 $-e^{2h(qz)}\equiv1$,这样 h 必为常数,矛盾.

情形 2 若 $\partial h/\partial z_1\neq0$,则由引理 3 知

$-(i/q_1)(\partial h/\partial z_1)e^{h(z)+h(qz)}\equiv1$ 或 $-(i/q_1)(\partial h/\partial z_1)e^{h(qz)-h(z)}\equiv1$.

若 $-(i/q_1)(\partial h/\partial z_1)e^{h(z)+h(qz)}\equiv1$,由式(8)得

$$-(\mathrm{i}/q_1)(\partial h/\partial z_1)\mathrm{e}^{h(z)+h(qz)}\equiv 1,$$
$$-(\mathrm{i}/q_1)(\partial h/\partial z_1)\mathrm{e}^{-h(z)-h(qz)}\equiv 1. \tag{9}$$

简单计算可得 $\partial h/\partial z_1=\pm\mathrm{i}q_1$.

当 $\partial h/\partial z_1=\mathrm{i}q_1$ 时，$h=\mathrm{i}q_1z_1+\varphi(z_2)$，其中 $\varphi(z_2)$ 为多项式，记 $\varphi(z_2)=b_mz_2^m+b_{m-1}z_2^{m-1}+\cdots+b_1z_2+b_0$，这里 b_j $(j=0,1,\cdots,m)$ 为常数. 根据式(9)得

$$h(qz)+h(z)=\mathrm{i}q_1^2z_1+\varphi(q_2z_2)+\mathrm{i}q_1z_1+\varphi(z_2)=2k\pi\mathrm{i},$$

此处及以下 $k\in\mathbf{Z}$，由此解得 $q_1=-1$，$\varphi(q_2z_2)+\varphi(z_2)=2k\pi\mathrm{i}$.

进一步，若 $|q_2|\neq 1$，则 $\varphi(z_2)=b_0$；若 $|q_2|=1$，则 $\varphi(z_2)=\varphi_0(z_2)+b_0=\sum_{j=1}^{s}b_{m_j}z_2^{m_j}+b_0$，其中 $\varphi_0(z_2)=\sum_{j=1}^{s}b_{m_j}z_2^{m_j}$，$q_2^{m_j}=-1$，$j=1,2,\cdots,s$，$b_0=k\pi\mathrm{i}$.

结合式(6)的第 2 式可得：当 $|q_2|\neq 1$ 时，$f(z)=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1+b_0}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1-b_0})/(2\mathrm{i})$；当 $|q_2|=1$ 时，

$$f(z)=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1+\varphi_0(z_2/q_2)+b_0}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1-\varphi_0(z_2/q_2)-b_0})/(2\mathrm{i})=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1-\varphi_0(z_2)+b_0}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1+\varphi_0(z_2)-b_0})/(2\mathrm{i}), \tag{10}$$

其中 $\varphi_0(z_2)=\sum_{j=1}^{s}b_{m_j}z_2^{m_j}$，$q_2^{m_j}=-1$，$j=1,2,\cdots,s$，$b_0=k\pi\mathrm{i}$.

当 $\partial h/\partial z_1=-\mathrm{i}q_1$ 时，$h=-\mathrm{i}q_1z_1+\varphi(z_2)$，其中 $\varphi(z_2)$ 为多项式，为方便仍记 $\varphi(z_2)=b_mz_2^m+b_{m-1}z_2^{m-1}+\cdots+b_1z_2+b_0$. 于是 $h(qz)+h(z)=-\mathrm{i}q_1^2z_1+\varphi(q_2z_2)-\mathrm{i}q_1z_1+\varphi(z_2)=(2k+1)\pi\mathrm{i}$. 解得 $q_1=-1$，$\varphi(q_2z_2)+\varphi(z_2)=(2k+1)\pi\mathrm{i}$. 于是，当 $|q_2|\neq 1$ 时，$\varphi(z_2)=b_0=(2k+1)\cdot\pi\mathrm{i}/2$；当 $|q_2|=1$ 时，

$$\varphi(z_2)=\varphi_0(z_2)+b_0=\sum_{j=1}^{s}b_{m_j}z_2^{m_j}+b_0, \tag{11}$$

其中 $q_2^{m_j}=-1$，$j=1,2,\cdots,s$. 这样，由式(6)得：当 $|q_2|\neq 1$ 时，$f(z)=(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1+b_0}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1-b_0})/(2\mathrm{i})$；当 $|q_2|=1$ 时，

$$f(z)=(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1+\varphi(z_2/q_2)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1-\varphi(z_2/q_2)})/(2\mathrm{i})=(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1-\varphi_0(z_2)+b_0}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1+\varphi_0(z_2)-b_0})/(2\mathrm{i}), \tag{12}$$

其中 $\varphi_0(z_2)$ 如式(11)所述.

若 $-(\mathrm{i}/q_1)(\partial h/\partial z_1)\mathrm{e}^{h(qz)-h(z)}\equiv 1$，则由式(8)得

$$-(\mathrm{i}/q_1)(\partial h/\partial z_1)\mathrm{e}^{h(qz)-h(z)}\equiv 1,$$
$$-(\mathrm{i}/q_1)(\partial h/\partial z_1)\mathrm{e}^{h(z)-h(qz)}\equiv 1,$$

上式即得 $\partial h/\partial z_1=\pm\mathrm{i}q_1$.

当 $\partial h/\partial z_1=\mathrm{i}q_1$ 时，$h=\mathrm{i}q_1z_1+\varphi(z_2)$，这里 $\varphi(z_2)$ 为多项式. 于是 $h(qz)-h(z)=\mathrm{i}q_1^2z_1+\varphi_3(q_2z_2)-\mathrm{i}q_1z_1-\varphi_1(z_2)=2k\pi\mathrm{i}$，解得 $q_1=1$，$\varphi(q_2z_2)-\varphi(z_2)=2k\pi\mathrm{i}$. 考虑 $\varphi(z_2)$ 为多项式，$\varphi(q_2z_2)-\varphi(z_2)$ 或者等于 0，或者为非常数多项式，故 $k=0$. 于是 $\varphi(q_2z_2)-\varphi(z_2)=0$，即 $|q_2|=1$，且

$$\varphi(z_2)=\varphi_0(z_2)+b_0=\sum_{j=1}^{s}b_{m_j}z_2^{m_j}+b_0,\ q_2^{m_j}=1,\ j=1,2,\cdots,s,$$

从而

$$f(z)=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1+\varphi(z_2/q_2)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1-\varphi(z_2/q_2)})/(2\mathrm{i})=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1+\varphi_0(z_2)+b_0}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_1-\varphi_0(z_2)-b_0})/(2\mathrm{i}), \tag{13}$$

其中 $q_2^{m_j}=1$，$j=1,2,\cdots,s$，b_0 为常数.

当 $\partial h/\partial z_1=-\mathrm{i}q_1$ 时，$h=-\mathrm{i}q_1z_1+\varphi(z_2)$，这里 $\varphi(z_2)$ 为多项式. 于是

$$h(qz)-h(z)=-\mathrm{i}q_1^2z_1+\varphi(q_2z_2)+\mathrm{i}q_1z_1-\varphi(z_2)=(2k+1)\pi\mathrm{i}.$$

由上式可得 $q_1=1$，$\varphi(q_2z_2)-\varphi(z_2)=(2k+1)\pi\mathrm{i}$. 结合 $\varphi(z_2)$ 为多项式及上述讨论易得矛盾.

由式(10)、式(12)和式(13)知定理 1 得证.

3　定理 2 的证明

假设方程(5)具有有限级超越整函数解 $f(z)$，类似于定理 1 的证明可知，存在多项式 $h(z)$，使得

$$\partial f/\partial z_1=(\mathrm{e}^h+\mathrm{e}^{-h})/2,$$
$$\alpha f(qz)-\beta f(z)=(\mathrm{e}^h-\mathrm{e}^{-h})/(2\mathrm{i}). \tag{14}$$

于是可得

$$\alpha q_1\partial f(qz)/\partial z_1-\beta\partial f(z)/\partial z_1=((\mathrm{e}^h+\mathrm{e}^{-h})/(2\mathrm{i}))\cdot\partial h/\partial z_1=\alpha q_1(\mathrm{e}^{h(qz)}+\mathrm{e}^{-h(qz)})/2-\beta(\mathrm{e}^h+\mathrm{e}^{-h})/2,$$

即 $(\beta-\mathrm{i}\partial h/\partial z_1)(\mathrm{e}^h+\mathrm{e}^{-h})=\alpha q_1(\mathrm{e}^{h(qz)}+\mathrm{e}^{-h(qz)})$. 于是

$$(\beta-\mathrm{i}\partial h/\partial z_1)\mathrm{e}^{h(z)+h(qz)}/(\alpha q_1)+(\beta-\mathrm{i}\partial h/\partial z_1)\cdot\mathrm{e}^{h(qz)-h(z)}/(\alpha q_1)-\mathrm{e}^{2h(qz)}\equiv 1. \tag{15}$$

由式(15)知 $\beta-\mathrm{i}\partial h/\partial z_1\not\equiv 0$. 否则 $\partial h/\partial z_1=-\mathrm{i}\beta$，$h=-\mathrm{i}\beta z_1+\varphi(z_2)$ 以及 $-\mathrm{e}^{2h(qz)}\equiv 1$，矛盾. 由引理 3 得 $(\beta-\mathrm{i}\partial h/\partial z_1)\mathrm{e}^{h(z)+h(qz)}/(\alpha q_1)\equiv 1$ 或 $(\beta-\mathrm{i}\partial h/\partial z_1)\mathrm{e}^{h(qz)-h(z)}/(\alpha q_1)\equiv 1$.

情形 1　若 $(\beta-\mathrm{i}\partial h/\partial z_1)\mathrm{e}^{h(z)+h(qz)}/(\alpha q_1)\equiv 1$，则代入式(15)可得

$$(\beta-\mathrm{i}\partial h/\partial z_1)\mathrm{e}^{h(z)+h(qz)}/(\alpha q_1)\equiv 1,$$
$$(\beta-\mathrm{i}\partial h/\partial z_1)\mathrm{e}^{-h(z)-h(qz)}/(\alpha q_1)\equiv 1. \tag{16}$$

由式(16)可得 $\beta-\mathrm{i}\partial h/\partial z_1=\pm\alpha q_1$，即 $\partial h/\partial z_1=-\mathrm{i}\beta\pm\mathrm{i}\alpha q_1$.

当 $\partial h/\partial z_1=-\mathrm{i}(\beta-\alpha q_1)$ 时，$h=-\mathrm{i}(\beta-\alpha q_1)z_1+\psi(z_2)$，其中 $\psi(z_2)$ 为多项式，记 $\psi(z_2)=b_mz_2^m+b_{m-1}z_2^{m-1}+\cdots+b_1z_2+b_0$，这里 $b_j(j=0,1,\cdots,m)$ 为复常数. 于是

$$h(qz)+h(z)=-\mathrm{i}(\beta-\alpha q_1)q_1z_1+\psi(q_2z_2)-\mathrm{i}(\beta-\alpha q_1)z_1+\psi(z_2)=2k\pi\mathrm{i},$$

由上式可得 $q_1=-1$，$\psi(q_2z_2)+\psi(z_2)=2k\pi\mathrm{i}$. 若 $|q_2|\neq 1$，则 $\psi(z_2)=k\pi\mathrm{i}$；若 $|q_2|=1$，则 $\psi(z_2)=$

$\sum_{j=1}^{s} b_{m_j} z_2^{m_j} + b_0$，其中 $b_0 = k\pi\mathrm{i}$，$q_2^{m_j} = -1$，$j = 1,2,\cdots,s$.
于是，结合式(14)的第1式可得

$$f(z) = -(\mathrm{e}^{h} - \mathrm{e}^{-h})/(2\mathrm{i}(\beta+\alpha)) + \Phi(z_2), \qquad (17)$$

其中 $\Phi(z_2)$ 为有限级整函数. 将其代入式(14)的第2式可知

$$\Phi(q_2 z_2) = \beta\Phi(z_2)/\alpha. \qquad (18)$$

若 $\Phi(z_2)$ 为常数，结合式(18)及 $|\beta/\alpha| \neq 1$ 可得 $\Phi(z_2) \equiv 0$. 否则，若 $\Phi(z_2) = a_0 (a_0 \neq 0)$，于是 $a_0 = \beta a_0/\alpha$，即 $\beta/\alpha = 1$，矛盾.

若 $\Phi(z_2)$ 为非常数多项式，不妨设 $\Phi(z_2) = d_m z_2^m + d_{m-1} z_2^{m-1} + \cdots + d_1 z_2$，这里 $d_j (j=1,2,\cdots,m)$ 为常数. 若 $d_j (j=1,2,\cdots,m)$ 中存在2项不为0，即 $d_i d_j \neq 0$，结合式(18)可得 $d_i q_2^i = d_i \beta/\alpha$，$d_j q_2^j = d_j \beta/\alpha$. 这样，$|q_2^{i-j}| = 1$，$|\beta/\alpha| = 1$，矛盾. 故 $d_j (j=1,2,\cdots,m)$ 中仅有1项不为0，再结合式(18)易得 $\Phi(z_2) = d_m z_2^m$，其中 $q_2^m = \beta/\alpha$.

若 $\Phi(z_2)$ 为超越整函数，不妨设 $\Phi(z_2) = a_0 + a_1 z_2 + a_2 z_2 + \cdots + a_m z_2^m + \cdots$，这里 $a_j (j=0,1,\cdots,m,\cdots)$ 为常数. 类似于 $\Phi(z_2)$ 为多项式的讨论，易得矛盾.

这样结合式(17)知，

$$f(z) = -(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta+\alpha)z_1 + \psi_1(z_2) + k\pi\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta+\alpha)z_1 - \psi_1(z_2) - k\pi\mathrm{i}}) / (2\mathrm{i}(\beta+\alpha)) + d_m z_2^m,$$

其中 $d_m = 0$ 或者 $d_m \neq 0$，$q_2^m = \beta/\alpha$，以及当 $|q_2| \neq 1$ 时，$\psi_1(z_2) = 0$，当 $|q_2| = 1$ 时，$\psi_1(z_2) = \sum_{j=1}^{s} b_{m_j} z_2^{m_j}$，$q_2^{m_j} = -1$，$j = 1,2,\cdots,s$.

当 $\partial h/\partial z_1 = -\mathrm{i}(\beta+\alpha q_1)$ 时，$h = -\mathrm{i}(\beta+\alpha q_1) z_1 + \psi_2(z_2)$，其中 $\psi_2(z_2)$ 为多项式. 于是 $h(qz) + h(z) = -\mathrm{i}(\beta+\alpha q_1) q_1 z_1 + \psi_2(q_2 z_2) - \mathrm{i}(\beta+\alpha q_1) z_1 + \psi_2(z_2) = (2k+1)\pi\mathrm{i}$. 上式蕴含着

$$q_1 = -1, \psi_2(q_2 z_2) + \psi_2(z_2) = (2k+1)\pi\mathrm{i}.$$

若 $|q_2| \neq 1$，则 $\psi_2(z_2) = (2k+1)\pi\mathrm{i}/2$. 若 $|q_2| = 1$，则 $\psi_2(z_2) = \sum_{j=1}^{s} b_{m_j} z_2^{m_j} + (2k+1)\pi\mathrm{i}/2$，其中 $q_2^{m_j} = -1$，$j = 1,2,\cdots,s$. 于是，结合式(14)的第1式可得

$$f(z) = -(\mathrm{e}^{h} - \mathrm{e}^{-h})/(2\mathrm{i}(\beta-\alpha)) + \Phi(z_2),$$

其中 $\Phi(z_2)$ 为有限级整函数. 将其代入式(14)的第2式可知 $\Phi(q_2 z_2) = \beta\Phi(z_2)/\alpha$. 类似前述讨论可得

$$f(z) = -(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta-\alpha)z_1 + \psi_1(z_2) + (2k+1)\pi\mathrm{i}/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta-\alpha)z_1 - \psi_1(z_2) - (2k+1)\pi\mathrm{i}}) / (2\mathrm{i}(\beta-\alpha)) + d_m z_2^m,$$

其中 $d_m = 0$ 或者 $d_m \neq 0$，$q_2^m = \beta/\alpha$. 以及当 $|q_2| \neq 1$ 时，$\psi_1(z_2) = 0$，当 $|q_2| = 1$ 时，$\psi_1(z_2) = \sum_{j=1}^{s} b_{m_j} z_2^{m_j}$，$q_2^{m_j} = -1$，$j = 1,2,\cdots,s$.

情形2 若 $(\beta - \mathrm{i}\partial h/\partial z_1)\mathrm{e}^{h(qz)-h(z)}/(\alpha q_1) \equiv 1$，则代入式(15)有

$$(\beta - \mathrm{i}\partial h/\partial z_1)\mathrm{e}^{h(qz)-h(z)}/(\alpha q_1) \equiv 1,$$
$$(\beta - \mathrm{i}\partial h/\partial z_1)\mathrm{e}^{-h(qz)+h(z)}/(\alpha q_1) \equiv 1.$$

简单计算可得 $\beta - \mathrm{i}\partial h/\partial z_1 = \pm\alpha q_1$.

当 $\partial h/\partial z_1 = -\mathrm{i}(\beta-\alpha q_1)$ 时，$h = -\mathrm{i}(\beta-\alpha q_1) z_1 + \psi_3(z_2)$，其中 $\psi_3(z_2)$ 为多项式. 于是 $h(qz) - h(z) = -\mathrm{i}(\beta-\alpha q_1) q_1 z_1 + \psi_3(q_2 z_2) + \mathrm{i}(\beta-\alpha q_1) z_1 - \psi_3(z_2) = 2k\pi\mathrm{i}$. 由上式可得 $q_1 = 1$，$\psi_3(q_2 z_2) - \psi_3(z_2) = 2k\pi\mathrm{i}$.

若 $|q_2| \neq 1$，则 $\psi_3(q_2 z_2) - \psi_3(z_2) = 0$，即 $\psi_3(z_2) = b_0$，b_0 为常数；若 $|q_2| = 1$，则 $\psi_3(z_2) = \sum_{j=1}^{s} b_{m_j} z_2^{m_j} + b_0$，其中 $q_2^{m_j} = 1$，$j = 1,2,\cdots,s$. 于是

$$f(z) = -(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta-\alpha)z_1 + \psi_1(z_2) + b_0} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta-\alpha)z_1 - \psi_1(z_2) - b_0}) / (2\mathrm{i}(\beta-\alpha)) + \Phi(z_2),$$

其中 b_0 为常数. 当 $|q_2| \neq 1$ 时，$\psi_1(z_2) = 0$；当 $|q_2| = 1$ 时，$\psi_1(z_2) = \sum_{j=1}^{s} b_{m_j} z_2^{m_j}$，$q_2^{m_j} = 1$，$j = 1,2,\cdots,s$，以及 $\Phi(q_2 z_2) = \beta\Phi(z_2)/\alpha$. 由类似于上述讨论 $\Phi(z_2)$ 的过程可得

$$f(z) = -(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta-\alpha)z_1 + \psi_1(z_2) + b_0} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta-\alpha)z_1 - \psi_1(z_2) - b_0}) / (2\mathrm{i}(\beta-\alpha)) + d_m z_2^m,$$

其中 b_0 为常数，$d_m = 0$ 或者 $d_m \neq 0$，$q_2^m = \beta/\alpha$. 以及当 $|q_2| \neq 1$ 时，$\psi_1(z_2) = 0$，当 $|q_2| = 1$ 时，$\psi_1(z_2) = \sum_{j=1}^{s} b_{m_j} z_2^{m_j}$，$q_2^{m_j} = 1$，$j = 1,2,\cdots,s$.

当 $\partial h/\partial z_1 = -\mathrm{i}(\beta+\alpha q_1)$ 时，$h = -\mathrm{i}(\beta+\alpha q_1) z_1 + \psi_4(z_2)$，其中 $\psi_4(z_2)$ 为多项式. 于是 $h(qz) - h(z) = -\mathrm{i}(\beta+\alpha q_1) q_1 z_1 + \psi_4(q_2 z_2) + \mathrm{i}(\beta+\alpha q_1) z_1 - \psi_4(z_2) = (2k+1)\pi\mathrm{i}$，上式蕴含着 $q_1 = 1$，$\psi_4(q_2 z_2) - \psi_4(z_2) = (2k+1)\cdot\pi\mathrm{i}$，矛盾，此时方程无解.

综上所述，定理2得证.

4 后记与展望

定理1与定理2主要给出了2类Fermat型偏微 q-差分方程整函数解的存在性条件及其形式，通过观察所讨论方程的形式，发现本文的2类方程仅涉及对某一个变量的1阶偏导数，自然有下述问题：

1) 若在方程中含有多个变量的偏导数，如同时含有 $\partial f/\partial z_1$ 与 $\partial f/\partial z_2$ 等，则如何求解?

2) 若在方程中1阶偏导数被高阶偏导数或高阶混合偏导数所替代，则方程的解有何变化?

3) 若方程的形式不是Fermat型，而是乘积型或其他型，则如何求解?

上述问题将是后续研究的内容，希望能给出更多类型的复域偏微 q-差分方程解的结果，进一步丰富复分析与复方程的研究.

5 参考文献

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究［M］. 北京：科学出版社，1982.

[2] 仪洪勋，杨重骏. 亚纯函数的唯一性定理［M］. 北京：科学出版社，1995.

[3] HAYMAN W K. Meromorphic functions［M］. Oxford：Clarendon Press，1964.

[4] CHIANG Y M，FENG Shaoji. On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane［J］. The Ramanujan Journal，2008，16(1)：105-129.

[5] HALBURD R G，KORHONEN R J. Difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative with applications to difference equations［J］. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2006，314(2)：477-487.

[6] BARNETT D C，HALBURD R G，MORGAN W，et al. Nevanlinna theory for the q-difference operator and meromorphic solutions of q-difference equations［J］. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A：Mathematics，2007，137(3)：457-474.

[7] BERGWEILER W，ISHIZAKI K，YANAGIHARA N. Meromorphic solutions of some functional equations［J］. Methods and Applications of Analysis，1998，5(3)：248-258.

[8] LI Baoqin. On certain non-linear differential equations in complex domains［J］. Archiv der Mathematik，2008，91(4)：344-353.

[9] LIU Kai. Meromorphic functions sharing a set with applications to difference equations［J］. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2009，359(1)：384-393.

[10] YANG Chungchun，LAINE I. On analogies between nonlinear difference and differential equations［J］. Proceedings of the Japan Academy Series A：Mathematical Sciences，2010，86(1)：10-14.

[11] HALBYRD R G，KORHONEN R J. Nevanlinna theory for the difference operator［J］. Annales Academiae Scientiarum Fennicae：Mathematica，2006，31(2)：463-478.

[12] HEITTOKANGAS J，KORHONEN R，LAINE I，et al. Complex difference equations of Malmquist type［J］. Computational Methods and Function Theory，2001，1(1)：27-39.

[13] RIEPPO J. On a class of complex functional equations［J］. Annales Academiae Scientiarum Fennicae：Mathematica，2007，32(1)：151-170.

[14] 刘曼莉，高凌云. 复微分-差分方程组的超越解［J］. 中国科学：数学，2019，49(11)：1633-1654.

[15] QI Xiaoguang，LIU Yong，YANG Lianzhong. A note on solutions of some differential-difference equations［J］. Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)，2017，52(3)：128-133.

[16] LIU Kai，CAO Tingbin，CAO Hongzhe. Entire solutions of Fermat type differential-difference equations［J］. Archiv der Mathematik，2012，99(2)：147-155.

[17] LIU Kai，YANG Lianzhong，LIU Xinling. Existence of entire solutions of nonlinear difference equations［J］. Czechoslovak Mathematical Journal，2011，61(2)：565-576.

[18] LIU Kai，CAO Tingbin. Entire solutions of Fermat type q-difference differential equations［J］. Electronic Journal of Differential Equations，2013，2013(59)：1-10.

[19] XU Ling，CAO Tingbin. Solutions of complex Fermat-type partial difference and differential-difference equations［J］. Mediterranean Journal of Mathematics，2018，15(6)：227.

[20] RONKIN L I. Introduction to the theory of entire functions of several variables［M］. Moscow：Academic Press，1971.

[21] STOLL W. Holomorphic functions of finite order in several complex variables［M］. Providence：American Mathematical Society，1974.

[22] PÓLYA G. On an integral function of an integral function［J］. Journal of the London Mathematical Society，1926，1(1)：12-15.

[23] HU Peichu，LI Ping，YANG Chungchun. Unicity of meromorphic mappings［M］. Dordrecht：Kluwer Academic Publishers，2003.

The Transcendental Solutions of Several Complex Nonlinear Partial Differential q-Difference Equations

XU Yihui，LIU Xiaolan，LI Yanfang，XU Hongyan*

(School of Arts and Sciences，Suqian University，Suqian Jiangsu 223800，China)

Abstract: In this paper，the solutions of several complex partial differential equations are studied by making use of Nevanlinna theory with two complex variables. Some results about the existence and the forms of the transcendental entire solutions of such equations are obtained. Meantime，some examples show that our theorems are precise to some extent.

Key words: Nevanlinna theory；partial differential q-difference equation；transcendental；Fermat type

（责任编辑：曾剑锋）