

尹洪位, 卢星宏, 周天寿. 封闭式光生物反应器中微藻生长的建模与控制 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2023, 47(4): 342-349.

YIN Hongwei, LU Xinghong, ZHOU Tianshou. The modeling and controlling of microalga growth in closed-form photo bioreactors [J]. Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science), 2023, 47(4): 342-349.

文章编号: 1000-5862(2023) 04-0342-08

封闭式光生物反应器中微藻生长的建模与控制

尹洪位¹, 卢星宏², 周天寿^{3*}

(1. 徐州工程学院数学与统计学院, 江苏 徐州 221111; 2. 南昌新生生物科技有限公司, 江西 南昌 330096;

3. 中山大学数学学院, 广东 广州 510275)

摘要: 如何取得最大生产效果是光生物反应器控制领域的一个关键且未完全解决的问题. 该文首先把在本项目设计的光生物反应器中的微藻生长这一复杂问题抽象为一个 3-状态动力学模型. 然后通过模型分析显示: 存在光照和温度的某种联合效果, 使得微藻生长率达到最大, 并导出了取得这种最大生长率的光照强度和温度必须满足的一个约束条件, 即一个非线性代数方程. 进一步显示: 假如光照和温度的联合影响函数可以近似解耦, 则当光照强度弱于或强于某个光照饱和度时, 可以分别通过升温或降温的补偿办法来取得最大的生长率. 该模型可以作为理解在光生物反应器中微藻生长控制的第 1 步, 且所得结果有利于设计高效的、智能控制的光生物反应器.

关键词: 光生物反应器; 微藻生长; 数学建模; 光照; 温度

中图分类号: Q 935 **文献标志码:** A **DOI:** 10. 16357/j. cnki. issn1000-5862. 2023. 04. 03

0 引言

在封闭式光生物反应器中培养单细胞藻类(特别是微藻) 是藻类养殖的一种可控方法. 这种操作简单的养殖方法不仅有利于在控制光合反应过程中影响藻类生长的条件(如光照、温度、营养液等), 而且有利于观察光合反应的动态变化. 与开放式光生物反应器相比, 封闭式光生物反应器可以实现一定程度的连续生产, 并且由于其与外部环境隔绝, 所以藻类生长不容易受到污染, 能够达到藻类生长的预设目标. 因此, 封闭式光生物反应器相比于开放式光生物反应器具有更大的应用前景^[1-3].

如何取得最大养殖效率是在光生物反应器中养殖藻类需要解决的一个关键科学问题. 由于影响藻类生长的因素有很多, 最常见的影响因素包括光照、温度、营养液等, 故解决这一科学问题任重道远. 为此, 关键一步是要构建合理的数学模型, 以便

揭示各种可能因素影响微藻生长的机制, 从而提出合理的控制策略; 同时, 这又有利于设计高效的、智能控制的光生物反应器.

根据著名的兰伯特-比尔(Lambert-Beer) 定律, 在光反应器中生长的微藻细胞接受的光流密度(也被称为辐照度或光照度) 是随着离反应器一侧的光照距离增加而指数减少的. 一般地, 靠近反应器前廊的细胞因接受更多的光照而会有一个更大的生长率, 而靠近反应器中心区域的细胞, 因接受更少的光照而会有一个更小的生长率. 尽管这样, 但是实验观察到: 更强的光照并不一定意味着更大的生长率. 假如光辐照度的增加反而导致生长率的降低, 那么这种现象被称为光抑制^[4-6]. 光抑制现象隐含着: 存在 1 个临界的光辐照度, 使得藻类生长率是最大的. 由于光照间歇区域的藻类细胞可以如同平均定常光照度情形一样具有相同的生长率^[7], 所以在研究该问题时可以仅考虑定常光照度对藻类生长的影响.

收稿日期: 2023-06-05

基金项目: 国家自然科学基金面上课题(11775314) 资助项目.

通信作者: 周天寿(1962—), 男, 江西南昌人, 教授, 博士, 博士生导师, 主要从事生物数学的研究. E-mail: mcszhtch@mail.sysu.edu.cn

除光照外,温度也是影响藻类生产效率的一个重要因素^[8].一般地,植物(包括藻类)可在温度 10~35℃ 时进行正常的光合作用.当温度为 25~30℃ 时光合作用是最适宜的,而当温度为 35~45℃ 时光合作用则几乎完全停止.在一定温度范围内,温度越高,光合作用越强;若温度超过某个阈值,则光合作用开始减弱.因为温度会影响酶的活性,因此在最适宜温度时光合作用最强,而当超过最适温度时,酶活性减弱.若温度过高,则为了防止水蒸发,在光反应器中的气孔关闭,二氧化碳来源不足,光合作用减弱甚至停止.当温度高于光合作用的最适宜温度时,光合速率明显地表现出随温度升高而下降.这是由于高温引起催化暗反应的有关酶钝化、变性甚至破坏.同时,高温会导致叶绿素的结构发生变化、甚至受损.实际上,光合作用的暗反应主要是酶催化反应,其反应速率易受温度影响.因此,温度是影响光合速率的一个重要因素.在强光、高二氧化碳(CO₂)浓度下温度对光合速率的影响比在低 CO₂ 浓度下温度对光合速率的影响更大,这是因为高 CO₂ 浓度有利于暗反应的进行.白天温度较高,日光充足,这有利于光合作用;夜间温度较低,可降低藻类细胞的呼吸消耗.在一定温度范围内,昼夜温差越大越有利于光合产物的积累.

如何建立把尽可能多的影响因素考虑在内的数学模型以便更好地理解和控制藻类(特别是微藻)的生长过程是一项挑战. 尽管这样,但也有某些零星的结果. 例如, S. Celikovský 等^[9]从系统论的观点研究了光照对藻类生长的单独影响, 研究发现: 当光照和黑暗的循环频率趋于无穷时, 藻类生长率趋于依赖于平均光辐射度的某个有限值. 陈艳拢等^[10]在潮湿温度和生长率之间关系的基础上, 依据谢尔福德(Shelford)耐受性定律, 建立了赤潮藻类生态幅(包括最适温度、适温范围、耐受范围等)的定量模型, 并导出了赤潮藻类的生物学零度. 杨燕等^[11]探索了不同藻类对气候变暖与富营养化叠加作用的响应模式. 文世勇等^[12]基于米氏凯伦藻和东海原甲藻生长特性的室内培养实验结果, 并结合谢尔福德耐受性定律, 建立了基于温度的米氏凯伦藻和东海原甲藻生长率的耐受性模型.

针对在本项目设计的封闭式光生物反应器中微藻生长过程的特点,研究建立一个生物学合理的数学模型:3 状态模型,主要用于探索光照和温度联合影响微藻生长的机制。

1 第7代光生物反应器工作原理简介

卢星宏对在封闭式光生物反应器中的单细胞微藻(主要是螺旋藻)生长进行了长期研究,先后设计出多款光生物反应器。其中第7代光生物反应器是他最新设计的(见图1),并获得了国家专利^[13]。为了对微藻生长过程建立合理的数学模型,以下简要介绍这种光生物反应器的工作原理。

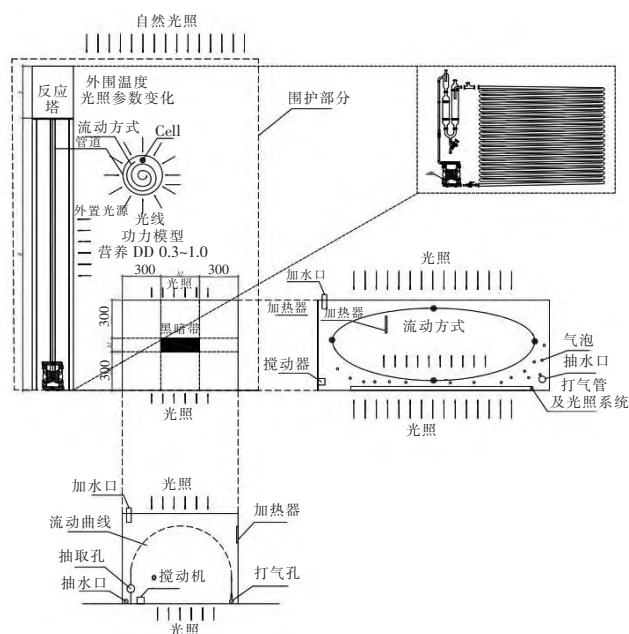


图1 第7代光生物反应器的工作原理示意图

1) 将微藻(如螺旋藻)、过滤水、营养液通过加水口(见图1的右下子图)注入,由反应泵(见图1左下方的圆柱形设备示意图,使用率只有30%)传入到反应塔(见图1的左子图),可以大大提高使用率.在反应塔内氧气与营养液混合后,在管道内呈螺旋状流动(见图1左上方的螺旋示意图),配合充足的光照进行光合作用(见图1左上方的螺旋示意图),再由反应管道传入反应池,使藻液循环流动(见图1的右下子图)。

2) 在反应塔中,藻液吸收二氧化碳、营养与光照.在管道流动过程中,开始快速进行光合作用.因此,细胞进行大量分裂并释放大量的氧气(见图1的右上子图中的排氧设备,它可以监测排氧量).

3) 监测装置系统实时监测藻液状态(包括空气中的二氧化碳、温度、营养液、光照、pH 值、排氧量,以及藻液中的溶氧、压力、容积、总氮、总磷、总钾等),并与供气系统、排氧系统的控制装置进行联动。

4) 由供气系统将二氧化碳输入反应池中,利用

空气中的二氧化碳溶解量高于排氧量的事实,将溶液中的氧气挤出,达成池压大于大气压,同时搅动(反应)池水。由加热系统维持温度、光照系统维持光照、营养补给装置维持营养、抽水口和搅动机维持反应池的水体循环,这样会出现一块“黑暗”区域,藻液在此进行暗反应。排氧过高会使得反应器的内压大于外压,此时氧气外溢,以使得微藻生长始终处于一个最佳的环境,从而达到最好的光合反应效率,此时微藻生长速率达到最大。

5) 在由监测装置探知藻液值(OD)达到预定标准时,即可进入采收环节。打开抽水口阀门与抽水泵,将藻液泵转入采收室进行干燥采收。

6) 根据采收后的废液监测情况,补充相关营养液,进行下一轮的微藻养殖。

2 数学建模

构建基于封闭式光合反应器(见图1)的微藻生长模型的主要目的:模拟在不同光照、温度、营养液(或盐)等环境条件下微藻生长的情况,从而了解微藻对碳、氮、磷、钾等的吸收与利用特征及影响因素,为多营养层次养殖微藻模式的合理构建提供参考。

这里主要是从动力系统的观点考察光照和温度对微藻生长的联合影响。为此,构建了所谓的3状态模型(见图2)。类似于文献[14],假设光合工厂(PSF)有3种状态:休眠(或静息)状态R(微藻不生长)、激活状态A(微藻正常生长)、抑制状态I(微藻生长被压制)。

温度过低或光照过弱会导致微藻处于休眠状态R,适当的光照或温度会导致微藻处于激活状态A,温度过高或光照过强会导致微藻处于抑制状态I。3种状态之间可以进行相互转化:首先,在光合作用下休眠状态可以转化成激活状态;其次,在激活状态的微藻生长达到一定程度后会转化成休眠状态;再次,因光照太强或太弱而导致激活状态转化成抑制状态;最后,抑制状态既可以转化成休眠状态,也可以转化成激活状态(如在一定的环境因素(包括营养液的充足、适当的光照或温度等)下)。这些事实是由本专利设计的第7代光生物反应器通过实验总结出来的。

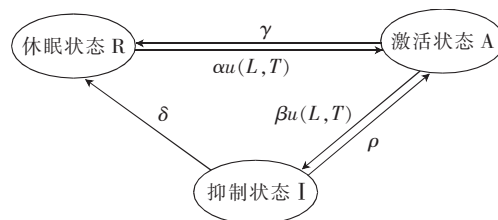


图2 模拟微藻生长过程的3状态模型

在图2中R代表微藻的休眠状态,A代表微藻的激活状态,I代表微藻的抑制状态 $\mu(L, T)$ 代表光照强度 L (单位: $\mu\text{E} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$,即在单位时间内每平方米的光照度或辐射度)和温度 T (单位: $^{\circ}\text{C}$)对微藻生长的联合影响函数(L 和 T 都可能会随时间变化而变化),且作为系统的输入函数。在图2中的 $\alpha u(L, T)$ 、 $\beta u(L, T)$ 、 δ 、 γ 和 ρ 分别代表各种状态之间的转移率,它们的单位均为 s^{-1} 。此模型没有显式地考虑营养液(盐)的影响,但它们的效果被隐式地整合到转移率中,且没有显式地考虑光合作用过程与呼吸过程,即没有考虑细化的化学反应过程。

需要指出的是:PSF的基本原理是3个状态之间可以进行相互转换,并把光照视为一个概率。然而,光事实上有2种特性:光强与辐射(辐射能够产生热能)。过热会导致微藻死亡,而温度不够会导致局部生长缓慢。不同的受体需要不同频率的光。例如,微藻产生的胡萝卜素、叶绿素、叶黄素、藻蓝蛋白等都在不同的光频率中进行生长。因此,光不是单纯的光照概率问题,而是通过调节反应器能否达到最佳的效能问题,使微藻尽可能地处于激活状态(即图2中的状态A)。此外,影响微藻生长的各种因素之间实际存在一种复杂的立体关系。由于光反应器的二氧化碳会随温度变化而变化甚至溶解,因此,当压力不同和温度不同时,吸碳度也不同。特别地,不同的压力会导致不同的吸碳度,而且后者以一种立体关系依赖于前者。故研究的目的是:从这种复杂的立体依赖关系中找到一个最合适的解,以便在缺失过程中适当补足微藻生长所需要的生长要素。下面为获得分析结果,假设 α 、 β 、 δ 、 γ 和 ρ 均为正常数。

让 P_R 代表PSF在休眠状态R时的概率, P_A 代表PSF在激活状态A时的概率, P_I 代表PSF在抑制状态I时的概率,它们一起满足守恒性条件: $P_R + P_A + P_I = 1$ 。若让 x_1 代表PSF在休眠状态下的摩尔分数, x_2 代表PSF在激活状态下的摩尔分数, x_3 代表PSF

在抑制状态下的摩尔分数, 并记 $\vec{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T = (P_R \ P_A \ P_I)^T$, 则根据图2可写出下列常微分方程:

$$d\vec{x}/dt = (A + uB)\vec{x}, \quad (1)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & \delta \\ 0 & -\gamma & -\rho \\ 0 & 0 & -(\delta + \rho) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

是2个常数矩阵 $\mu = u(L, T)$ 是光照(L)和温度(T)对微藻生长的联合影响函数. 由方程(1)并结合保守性条件可消除变量 x_1 , 得到下列激活状态与抑制状态的运动学方程:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & \rho \\ 0 & -(\delta + \rho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -(\alpha + \beta) & -\alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中 $u = u(L, T)$ 可以作为系统的输入函数. 方程(2)可作为微藻生长的基本模型. 由于微藻生长率与从休眠状态到激活状态的转移率(等于 γx_2)成正比, 故生长率可表示为

$$\mu = \kappa \gamma P_A = \kappa \gamma x_2, \quad (3)$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 是正常数, κ 是一个依赖于微藻性质的正常数. 在数值仿真时, 参照文献[7]可设参数值为: $\alpha = 1.935 \times 10^{-3} \mu E^{-1} \cdot m^2 / ^\circ C$, $\beta = 5.785 \times 10^{-7} \mu E^{-1} \cdot m^2 / ^\circ C$, $\gamma = 1.460 \times 10^{-1} s^{-1}$, $\delta = 4.796 \times 10^{-4} s^{-1}$, $\rho = 2.15 \times 10^{-6} s^{-1}$, $\kappa = 3.647 \times 10^{-3}$; 初始条件为 $(x_2(0), x_3(0)) = (0, 0)$, 即初始时刻微藻细胞的摩尔分数为0.

从数学的观点来看, 上面模型的一般化是下列单输入控制的系统:

$$d\vec{x}/dt = A\vec{x} + (B\vec{x} + \vec{c})u, \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \quad (4)$$

其中 $\vec{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ 代表系统的状态向量; A 和 B 都是 $n \times n$ 矩阵, \vec{c} 是 n 维列向量; $u = u(t)$ 是假定在有限区间 $[t_0, t_f]$ 上的连续函数(系统的输入函数, 允许取常数值), 且假设在有限范围内变化, 即

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}, \quad t_0 \leq t \leq t_f.$$

显然, 方程(4)的右端函数关于 \vec{x} 和 u 分别是线性的, 但不是同时线性的(即不是双线性的). 一般化模型(4)的分析与其简化版本的模型(1)的分析类似. 因此, 以下主要聚焦于模型(1), 目的是: 通过分析得出光照强度(L)和温度(T)是如何定量、定

性地影响微藻生长率, 进而影响微藻的生物量.

3 结果

3.1 微藻生长系统的静态与轨线

假定光照度和温度都是常数, 并作为系统的参数. 此时, 方程(2)是一个常系数的非齐次线性常微分方程, 可以求出解析解. 假如系统达到平衡, 记相应的平衡态(即在微藻生长充分长时间之后系统达到的状态)为 $(x_2^{(s)}, x_3^{(s)})$, 则可求得

$$x_2^{(s)} = \tilde{\alpha} u / (\tilde{\alpha} \tilde{\beta} u^2 + (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} - \tilde{\beta} \tilde{\rho}) u + \tilde{\gamma}), \quad x_3^{(s)} = u \tilde{\beta} x_2^{(s)},$$

其中 $\tilde{\alpha} = \alpha / (\delta + \rho)$, $\tilde{\beta} = \beta / (\delta + \rho)$, $\tilde{\gamma} = \gamma / (\delta + \rho)$, $\tilde{\rho} = \rho / (\delta + \rho)$ 都是无量纲的集总参数.

由式(3)知, 在平衡点处的生长率可以表示为

$$\mu = \tilde{\alpha} \kappa \gamma u / (\tilde{\alpha} \tilde{\beta} u^2 + (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} - \tilde{\beta} \tilde{\rho}) u + \tilde{\gamma}) = \tilde{\alpha} \kappa \gamma / (\tilde{\alpha} \tilde{\beta} u + \tilde{\gamma} / u + \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} (1 - \tilde{\rho})). \quad (5)$$

由此, 并不困难地显示出: 若 $u < \sqrt{\tilde{\gamma} / (\tilde{\alpha} \tilde{\beta})}$, 则

生长率 μ 是 u 的单调增加函数; 若 $u > \sqrt{\tilde{\gamma} / (\tilde{\alpha} \tilde{\beta})}$, 则生长率 μ 是 u 的单调减少函数. 因此, 当 $u = \sqrt{\tilde{\gamma} / (\tilde{\alpha} \tilde{\beta})}$ 时, 微藻生长率 μ 取得最大值, 且最大

生长率为 $\mu_{\max} = \tilde{\alpha} \kappa \gamma / (2\sqrt{\tilde{\alpha} \tilde{\gamma} \tilde{\beta}} + \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} (1 - \tilde{\rho}))$, 此时, 光照(L)和温度(T)的联合效果函数 $u(L, T)$ 满足代数方程:

$$u_{\max} = u(L, T) = \sqrt{\tilde{\gamma} / (\tilde{\alpha} \tilde{\beta})}. \quad (6)$$

注意到, 满足初始条件 $(x_2(t_0), x_3(t_0)) = (x_2^0, x_3^0)$ 的方程(2)的解可以表示为

$$\begin{cases} x_2(t) = c_1 e^{\lambda_+ t} (1 + \tilde{\lambda}_+) / (\tilde{\beta} u) + c_2 e^{\lambda_- t} (1 + \tilde{\lambda}_-) / (\tilde{\beta} u) + \tilde{\alpha} u / g(u), \\ x_3(t) = c_1 e^{\lambda_+ t} + c_2 e^{\lambda_- t} + \tilde{\alpha} \tilde{\beta} u^2 / g(u), \end{cases}$$

其中 $\lambda_{\pm} = (-(1 + \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha} u + \tilde{\beta} u) \pm \sqrt{\Delta}) / (2(\delta + \rho)^{-1})$ 是系统(2)的系数矩阵(即考虑 u 为常数的系统)的2个特征值, 这里 $\Delta = (\tilde{\gamma} - 1 + \tilde{\alpha} u + \tilde{\beta} u)^2 - 4\tilde{\alpha} \tilde{\beta} u^2$ 是相应特征方程的判别式, $g(u) = \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha} u + \tilde{\beta} u (1 + \tilde{\rho} - \tilde{\alpha} u)$ 是一个依赖于光照和温度的联合影响函数

$u = u(L, T)$ 的正函数, 2 个常数 c_1 和 c_2 由初始条件决定. 通过计算发现 c_1 和 c_2 可以表示为

$$c_1 = \frac{(1 + \tilde{\lambda}_+) x_3^0 - \tilde{\beta} u x_2^0}{\tilde{\lambda}_+ - \tilde{\lambda}_-} e^{-\lambda_- t_0} - \frac{\tilde{\alpha} \tilde{\beta} \tilde{\lambda}_+ u^2 e^{-\lambda_- t_0}}{(\tilde{\lambda}_+ - \tilde{\lambda}_-) g(u)},$$

$$c_2 = \frac{\tilde{\beta} u x_2^0 - (1 + \tilde{\lambda}_-) x_3^0}{\tilde{\lambda}_+ - \tilde{\lambda}_-} e^{-\lambda_+ t_0} + \frac{\tilde{\alpha} \tilde{\beta} \tilde{\lambda}_- u^2 e^{-\lambda_+ t_0}}{(\tilde{\lambda}_+ - \tilde{\lambda}_-) g(u)},$$

其中 $\tilde{\lambda}_\pm = (\delta + \rho)^{-1} \lambda_\pm$. 由于 $\lambda_\pm < 0$, 因此, 对于任意的初值 (x_2^0, x_3^0) , 系统的轨线均指数地接近于静态 $(x_2^{(s)}, x_3^{(s)})$, 这蕴含着静态是渐近稳定的.

从化学的观点来看, 控制函数 u 可以看作是催化反应的底物, 作为微藻生长率 μ 的输入变量, 且可以是时间 t 的函数. 若微藻生长率函数 $\mu(t)$ 是已知的, 则可求得细胞密度函数 C_x : $\mu = (dC_x/dt)/C_x = d \ln C_x / dt$, 而且 $C_x(t) = C_x(t_0) \exp(\int_{t_0}^t \mu(s) ds)$, 这表明微藻细胞密度 C_x 随时间变化是指数增长的.

3.2 光照和温度对微藻生长的联合影响

尽管式(6)给出微藻取得最大生长率的代数条件, 但是仍不清楚光照和温度是如何协作地影响微藻生长的. 为了获得分析结果, 假设光照和温度的联合影响函数可以解耦, 即假设函数 $u(L, T)$ 具有形式:

$$u(L, T) = U(L) V(T).$$

光照强度对微藻生长和光合作用的影响, 大部分模型都采用下列所谓的“Steele 公式”^[15]:

$$U(L) = L \exp(1 - L/L_{\text{opt}}) / L_{\text{opt}}, \quad (7)$$

其中 L_{opt} (单位: $\mu\text{E} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$) μE 为微爱因斯坦且 $1 \mu\text{E} = 1 \mu\text{mol}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$, 叫做量子流密度) 为最适宜微藻生长的光照强度, 即微藻生长的光照饱和强度. 这种设置也已经被本专利设计的第 7 代光生物反应器的实验数据所证实(但本文没有展示有关数据)^[13], 因此该设置是合理的. 在数值模拟中, 设 $L_{\text{opt}} = 248 \mu\text{E} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

根据实验观察或数据^[16-17] 可以假设温度函数采取下列分段函数形式:

$$f(T) = \begin{cases} e^{(T - T_{\text{norm}})/\omega}, & T \leq T_{\text{norm}}, \\ e^{(T_{\text{norm}} - T)/\omega}, & T > T_{\text{norm}}, \end{cases} \quad (8)$$

其中 T_{norm} 为微藻生长的正常温度, 且对于大多数微

藻, 正常温度可设为 $T_{\text{norm}} = 25^\circ\text{C}$; ω 是一个依赖于微藻性质的经验常数(一个正常数, 在数值模拟中, 设 $\omega = 8$). 这种设置蕴含着: 当 $T \leq T_{\text{norm}}$ 时 $f(T)$ 是一个单调增加函数; 当 $T > T_{\text{norm}}$ 时 $f(T)$ 是一个单调减少函数. 这符合微藻生长的常识.

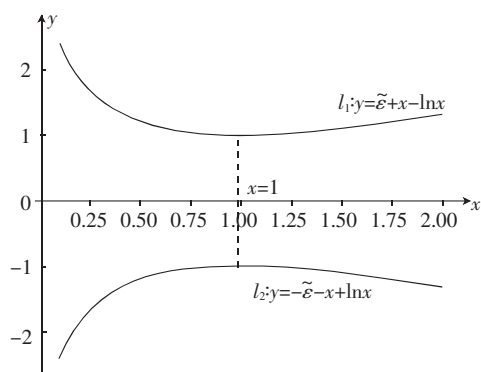
对于光照和温度的上述设置, 在微藻生长具有最大生长率(对应的光照和温度的联合效果记为 u_{max}) 时, 方程(6) 变成

$$u_{\text{max}} = \begin{cases} \frac{L}{L_{\text{opt}}} \exp\left(1 - \frac{L}{L_{\text{opt}}} + \frac{T - T_{\text{norm}}}{\omega}\right), & T \leq T_{\text{norm}}, \\ \frac{L}{L_{\text{opt}}} \exp\left(1 - \frac{L}{L_{\text{opt}}} + \frac{T_{\text{norm}} - T}{\omega}\right), & T > T_{\text{norm}}. \end{cases}$$

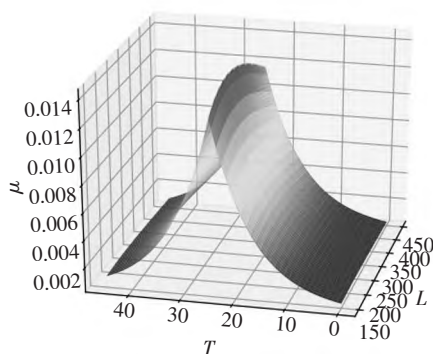
为方便起见, 记 $\tilde{\varepsilon} = \ln(e^{-1} u_{\text{max}}) = \ln(e^{-1} \cdot$

$\sqrt{\tilde{\gamma}/(\tilde{\alpha}\tilde{\beta})})$. 若 $T \leq T_{\text{norm}}$, 则 $x e^{-x+y} = e^{\tilde{\varepsilon}}$ (其中 $x = L/L_{\text{opt}}$ 和 $y = (T - T_{\text{norm}})/\omega$), 它等价于 $y = \tilde{\varepsilon} + x - \ln x$, 是一条曲线并记为 l_1 (见图 3 的上部曲线); 若 $T > T_{\text{norm}}$, 则 $x e^{-x-y} = e^{\tilde{\varepsilon}}$, 则它等价于: $y = -\tilde{\varepsilon} - x + \ln x$, 是一条曲线并记为 l_2 (见图 3 的下部曲线). 因此, 在 3 维空间(光照, 温度, 生长率)中, 生物量在一个曲面上取得最大值, 或者说, 光照和温度以曲面方式影响微藻生长率, 而不是曲线方式.

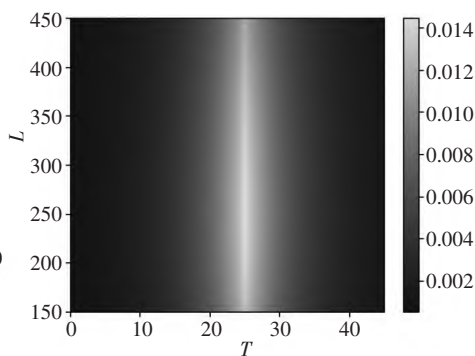
注意到: 函数 $y = \tilde{\varepsilon} + x - \ln x$ 和 $y = -\tilde{\varepsilon} - x + \ln x$ 分别在 $x = 1$ (即 $L = L_{\text{opt}}$) 处取得最小值($T = T_{\text{norm}} + \omega(1 + \tilde{\varepsilon})$) 和最大值($T = T_{\text{norm}} - \omega(1 + \tilde{\varepsilon})$). 对于曲线 l_1 , 若 $x < 1$ (即 $T \leq T_{\text{norm}}$), 则函数 $y = \tilde{\varepsilon} + x - \ln x$ 是单调减少的, 这蕴含着: 当光照强度小于光照饱和度时, 为了取得最大微藻生长率, 可以通过升温的方式来补偿光照的不足; 若 $x > 1$ (即 $T > T_{\text{norm}}$), 则函数 $y = \tilde{\varepsilon} + x - \ln x$ 是单调增加的, 这蕴含着: 当光照强度大于光照饱和度时, 为了取得最大微藻生长率, 可以通过降温的方式来减少强光的影响. 对于曲线 l_2 , 若 $x < 1$, 则函数 $y = -\tilde{\varepsilon} - x + \ln x$ 是单调增加的, 这蕴含着: 当光照强度小于光照饱和度时, 为了取得最大微藻生长率, 可以通过升温的方式来补偿光照的不足; 若 $x > 1$, 则函数 $y = -\tilde{\varepsilon} - x + \ln x$ 是单调减少的, 这蕴含着: 当光照强度大于光照饱和度时, 为了取得最大微藻生长率, 可以通过降温的方式来减少强光的影响.

图3 2条曲线 l_1 和 l_2 的特征

由于参数 $\tilde{\varepsilon}$ 并不影响曲线的特征, 因此, 为了突出2条曲线的极值点, 设 $\tilde{\varepsilon}$ 的值为 1.0×10^{-5} . 在图3中 $x = L/L_{\text{opt}}$ $y = (T - T_{\text{norm}}) / \omega$ $L_{\text{opt}} = 248 \mu\text{E} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$,



(a) 3 维图



(b) 2 维热图

图4 光照度(L)和温度(T)对微藻生长率的联合影响

在图4中 μ 的单位为在每秒时间内的摩尔数; 在图4(a) 3 维图中, “转折”部分代表微藻生长率达到最大; 在图4(b) 2 维热图中, 颜色棒显示出微藻生长率的大小变化.

由数值显示出微藻生长率(μ)是如何随时间变化而变化的. 为了比较不同联合函数 $u = u(L, T)$ 对微藻生长的不同影响, 选取 u 的4组值: $u_{\text{max}} = \sqrt{\tilde{\gamma} / (\tilde{\alpha}\tilde{\beta})}$ (使微藻生长率达到最大的光照度和温度) $\mu_2 = 180 \mu\text{E} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} / ^\circ\text{C}$ (小的影响) $\mu_3 = 200 \mu\text{E} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} / ^\circ\text{C}$ (中等影响) $\mu_4 = 400 \mu\text{E} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} / ^\circ\text{C}$ (大的影响). 此外, 时间限定在 $0 \leq t \leq 60$ (单位: s) 的范围内(由于上面的理论分析显示出系统是指数衰减的, 因此, 考虑小的时间范围). 计算结果绘制在图5中. 从图5可观察到: 首先, 在最初阶段, 微藻生长率增加明显; 其次, 正如上面理论预测的那样, 微藻生长率很快达到平衡; 最后, 在光照度和温度的联合函数 $u = u(L, T)$ 取 u_{max} 时的微藻

$$T_{\text{norm}} = 25 ^\circ\text{C} \quad \omega = 8.$$

下一步, 通过数值分析可直观地显示出光照度和温度是如何共同影响微藻生长的. 为此, 限定光照度的变化范围为 $150 \mu\text{E} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \leq L \leq 450 \mu\text{E} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ 温度的变化范围为 $0 ^\circ\text{C} \leq T \leq 45 ^\circ\text{C}$.

首先, 根据微藻生长率的式(5)并结合光照度的设置(7)和温度的设置(8), 绘制了图4. 从图4(a)观察到: 的确存在光照度(L)和温度(T)的一条曲线(见图4(a)中的“转折”部分), 使得微藻生长率(μ)达到最大. 相应于3维图4(a)的2维热图4(b)显示出微藻生长率(最右边的颜色棒)是如何定量地依赖于光照度和温度的, 其中的白色部分对应于最大微藻生长率的光照度和温度.

生长率(参考大图)的量级比在 u_2 μ_3 和 u_4 3种情形下的微藻生长率(见图5的内图)要大很多(甚至存在数量级上的差异). 图5显示 μ 的值很小的原因是考虑在每秒内微藻生长的摩尔数. 假如考虑在每小时内微藻的生长率, 则 μ 的值会变得较大.

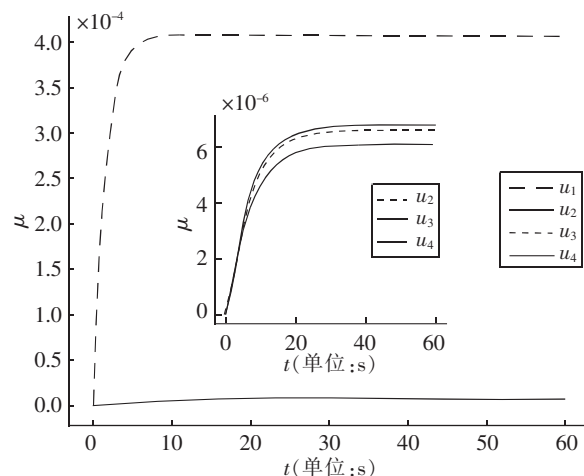
图5 微藻生长率(μ)的时间演化

图5的内图是在 u_2 μ_3 和 u_4 3种情形时微藻生长率的扩大图. 时间(t)的单位为 s.

4 结论与讨论

对于在封闭式光生物反应器中养殖的微藻,其生长不仅与光照和温度有关,而且依赖于水体的营养液等许多因素.本文已经分析了光照和温度对微藻(特别是螺旋藻)生长的联合影响(但没有显式地考虑营养液的影响),并显示:存在光照强度和温度之间关系的一条曲线,在此曲线上的任意一点(光照度和温度)都能够使得微藻生长率达到最大.当光照强度小于光照饱和度时,为了使得微藻生长率达到最大,可以通过升温的方式;当光照强度大于光照饱和度时,为了使得微藻生长率达到最大,可以通过降温的方式.这蕴含着:早上、上午、下午和晚上可能需要升温;若中午光照很强,则需要降温.这些理论预测结果都符合微藻生长的常识,也被本实验所证实.

尽管本文把一个复杂的微藻生长问题转化为一个简单的数学模型分析问题,但是本模型在许多方面上做了简化.例如,它忽视了在微藻生长过程中光合作用的化学反应.事实上,微藻生长涉及一系列化学反应^[18-19],主要包括光合作用过程的化学反应和呼吸过程的化学反应.首先,光合作用把水和二氧化碳合成有机物并释放氧气;其次,微藻生长通过某些化学反应过程来呼吸氧气.本模型也没有显式地考虑营养液(盐)对微藻生长的影响(已有很多文献单独研究了这种影响^[20-25]).研究指出:这些简化不仅是为了理论分析的方便,而且更是为了揭示光照和温度对微藻生长联合影响的本质机制.

本文的主要结论是在“光照和温度对生长率的联合影响可以被解耦”假设下获得的,即假设 $u = u(L, T) = U(L) V(T)$.显然,这种假设被理想化了,实际的联合影响函数可能有复杂的形式.此外,在对模型进行动力学分析时假设光照强度(L)和温度(T)都是常数,而实际情况是光照强度和温度是随时间变化而变化的.例如,早上、上午、中午、下午和晚上的光照强度和温度是不一样的.由于本分析分别考虑了 L 和 T 的宽广范围,因此,在考虑时间演化情形时,本文的结论仍然能够成立.本文假设 α 、 β 、 δ 、 γ 和 ρ 均为不依赖于时间的正常数,然而,这些模型参数可以是依赖于时间的函数.例如,它们可能依赖于营养液的浓度,而这种浓度会随时间的变化而变化.

最后,值得指出的是:本模型能够作为在光生

物反应器中养殖微藻的整个复杂系统的1阶近似(即1级模型或宏观模型).当考虑更多的且实验可测量的变量(如营养液、藻液值、排氧量、酸碱度等)时,可以把模型中的参数 α 、 β 、 δ 、 γ 和 ρ 等作为这些变量的函数,建立2级模型.在2级模型的基础上,再考虑更多的影响变量(如光合作用等);同样,可建立3级模型.依次进行下去,可以建立一个多层次模型.这种建模策略可以解决在光生物反应器中微藻养殖的复杂建模问题,并有利于并行计算的设计.

5 参考文献

- [1] 郑国香,刘瑞娜,李永峰.能源微生物学[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2013.
- [2] 刘志伟,余若黔,郭勇,等.微藻培养的光生物反应器[J].现代化工,2000,20(12):56-58.
- [3] 王长海,鞠宝,董言梓,等.光生物反应器及其研究进展[J].海洋通报,1998,17(6):79-86.
- [4] MASOJIDEK J, PAPACEK S, SERGEJEVOVA M, et al. A closed solar photobioreactor for cultivation of microalgae under supra-high irradiances: basic design and performance [J]. Journal of Applied Phycology, 2003, 15(2/3): 239-248.
- [5] PAPACEK S. Photobioreactors for cultivation of microalgae under strong irradiances: modelling, simulation and design [D]. Liberec: Technical University of Liberec, 2005.
- [6] RICHMODN A. Biological principles of mass cultivation [M]//RICHMOND A. Handbook of microalgal culture: biotechnology and applied phycology. Oxford: Blackwell Publishing, 2004: 125-177.
- [7] PAPACEK S, CELIKOVSKÝ S, STYS D, et al. Bilinear system as a modelling framework for analysis of microalgal growth [J]. Kybernetika, 2007, 43(1): 1-20.
- [8] WANG Feifei, LI Yuanhong, YANG Rundong, et al. Effects of sodium selenite on the growth, biochemical composition and selenium biotransformation of the filamentous microalga *Tribone-ma minus* [J]. Bioresource Technology, 2023, 384: 129313.
- [9] CELIKOVSKÝ S, PAPACEK S, CERVANTES-HERRERA A, et al. Singular perturbation based solution to optimal microalgal growth problem and its infinite time horizon analysis [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(3): 767-772.
- [10] 陈艳拢,赵冬至,杨建洪,等.赤潮藻类温度生态幅的定量表达模型研究[J].海洋学报,2009,31(5): 156-161.
- [11] 杨燕,朱雪竹,张民,等.不同藻类对温度与磷叠加作用的响应模式[J].湖泊科学,2016,28(4): 843-851.

- [12] 文世勇, 刘希真, 王紫竹, 等. 不同光照条件下米氏凯伦藻和东海原甲藻生长的温度生态幅 [J]. 生态学报, 2018, 38(14): 5187-5194.
- [13] 卢星宏. 复合式藻类养殖设备: 202122835616. 9 [P]. 2022-08-19.
- [14] EILERS P H C, PEETERS J C H. A model for the relationship between light intensity and the rate of photosynthesis in phytoplankton [J]. Ecological Modelling, 1988, 42(3/4): 199-215.
- [15] SHI Jie, WEI Hao, ZHAO Liang et al. A physical-biological coupled aquaculture model for a suspended aquaculture area of China [J]. Aquaculture, 2011, 318(3/4): 412-424.
- [16] BOWIE G L, MILLS W B, PORCELLA D B, et al. Rates, constants and kinetics formulations in surface water quality modeling [M]. 2nd ed. Athens: US Environmental Protection Agency, 1985.
- [17] BROCH O J, SLAGSTAD D. Modelling seasonal growth and composition of the kelp *Saccharina latissima* [J]. Journal of Applied Phycology, 2012, 24(4): 759-776.
- [18] ANSARI F A, RATHA S K, RENUKA N, et al. Effect of microplastics on growth and biochemical composition of microalga *Acutodesmus obliquus* [J]. Algal Research, 2021, 56: 102296.
- [19] GAO Shufei, SHEN Anglu, JIANG Jie, et al. Kinetics of phosphate uptake in the dinoflagellate *Karenia mikimotoi* in response to phosphate stress and temperature [J]. Ecological Modelling, 2022, 468: 109909.
- [20] 蔡霞. 大型藻类对氮的吸收利用模型的研究 [D]. 杭州: 浙江海洋大学, 2018.
- [21] WANG Yitao, Xu Dong, FAN Xiao, et al. Variation of photosynthetic performance, nutrient uptake, and elemental composition of different generations and different thallus parts of *Saccharina japonica* [J]. Journal of Applied Phycology, 2013, 25(2): 631-637.
- [22] GLIBERT P M, WILKERSON F P, DUGDALE R C, et al. Pluses and minuses of ammonium and nitrate uptake and assimilation by phytoplankton and implications for productivity and community composition, with emphasis on nitrogen-enriched conditions [J]. Limnology and Oceanography, 2016, 61(1): 165-197.
- [23] 邹定辉, 夏建荣. 大型海藻的营养盐代谢及其与近岸海域富营养化的关系 [J]. 生态学杂志, 2011, 30(3): 589-595.
- [24] 郑彩璐, 赵卓, 王丽娜. 大型海藻对主要营养盐的吸收的研究进展 [J]. 现代生物医学进展, 2009, 9(21): 4140-4141.
- [25] 刘静雯, 董双林. 海藻的营养代谢及其对主要营养盐的吸收动力学 [J]. 植物生理学通讯, 2001, 37(4): 325-330.

The Modeling and Controlling of Microalga Growth in Closed-Form Photo Bioreactors

YIN Hongwei¹, LU Xinghong², ZHOU Tianshou^{3*}

(1. School of Mathematics and Statistics, Xuzhou University of Technology, Xuzhou Jiangsu 221111, China;

2. Nanchang New Biological Technology Company Limited, Nanchang Jiangxi 330096, China;

3. School of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou Guangdong 510275, China)

Abstract: How the maximum production efficiency is achieved a key yet unsolved issue in the photo bioreactor control field. Here the complex issue of microalga growth in the photo bioreactor designed by this project is first transformed into a 3-state dynamical model. Then, model analysis shows that there is some joint effect of illumination and temperature such that the microalga growth rate achieves the maximum for which a constrained condition (i. e., a nonlinear algebraic equation) of illumination and temperature. Furthermore, it is shown that if the joint influence function of illumination and temperature can be approximately decoupled, then when illumination intensity is weaker or stronger than a critical value, the maximum growth rate can be achieved through a temperature-rising or -lowering method. While the model developed here may be taken as the first step toward understanding the control of microalga growth in a photo bioreactor, the results obtained here are helpful to designing highly efficient, intelligence-control photo bioreactor.

Key words: photo bioreactor; microalga growth; mathematical modeling; illumination; temperature

(责任编辑: 王金莲)