

魏涛,安静. 4 阶方程基于混合格式的一种有效的 Legendre-Galerkin 逼近 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2023, 47(6): 551-557.

WEI Tao, AN Jing. The efficient Legendre-Galerkin approximation based on mixed schemes for fourth-order equations [J]. Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science), 2023, 47(6): 551-557.

文章编号:1000-5862(2023)06-0551-07

4 阶方程基于混合格式的一种有效的 Legendre-Galerkin 逼近

魏 涛,安 静*

(贵州师范大学数学科学学院,贵州 贵阳 550025)

摘要:该文提出了 4 阶方程基于混合格式的一种有效的 Legendre-Galerkin 逼近. 首先,通过引入一个辅助函数,将原问题化为等价的 2 阶混合格式. 再引入一类适当的 Sobolev 空间及其逼近空间,建立了 2 阶混合格式的弱形式和相应的离散格式;其次,利用在非一致带权 Sobolev 空间中正交投影算子的逼近性质,证明了逼近解的误差估计;另外,利用 Legendre 多项式的正交性质,构造了在逼近空间中的一组适当的基函数,使得在离散混合变分形式中的质量矩阵和刚度矩阵都是稀疏的,从而能够用共轭梯度法快速地求解. 最后,给出了一些数值算例,数值结果表明了所提出的算法的有效性和高精度性.

关键词:4 阶问题;混合格式;Legendre-Galerkin 逼近;误差估计

中图分类号:O 241.8 **文献标识码:**A **DOI:**10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2023.06.01

0 引言

4 阶问题广泛地应用于科学和工程领域,很多复杂的非线性问题的数值计算最终都归结为求解 4 阶微分方程,如计算流体动力学和 Cahn-Hilliard 方程^[1-4]、传输特征值问题^[5-10]等. 因此,关于 4 阶问题数值方法,一直以来是很多学者关注的话题,提出一些有效求解 4 阶问题的高精度数值方法十分有意义.

众所周知,对于 4 阶问题的协调有限元法,逼近空间必须满足在整个计算区域内是连续可微的,其基函数的构造非常复杂,特别是对一些 3 维的 4 阶非线性问题. 各种各样的有限元法相继被提出并广泛地应用于很多物理问题和数学问题的计算^[11-18]. 然而,这些数值方法主要是基于一些低阶的有限元方法,要获得高精度的数值解需要花费很多计算时

间和内存容量. 因此,本文的目的是提出 4 阶方程基于混合格式的一种有效的 Legendre-Galerkin 逼近. 首先,通过引入一个辅助函数,将原问题化为等价的 2 阶混合格式;再引入一类适当的 Sobolev 空间及其逼近空间,建立了 2 阶混合格式的弱形式和相应的离散格式. 其次,利用在非一致带权 Sobolev 空间中正交投影算子的逼近性质,证明了逼近解的误差估计;另外,利用 Legendre 多项式的正交性质,构造了在逼近空间中的一组适当的基函数,使得在离散混合变分形式中的质量矩阵和刚度矩阵都是稀疏的,从而能够用共轭梯度法快速地求解. 最后,给出了一些数值算例,数值结果表明了本文算法的有效性和高精度性.

1 耦合的降阶格式及其变分形式

本文考虑如下 4 阶问题:

收稿日期:2023-09-18

基金项目:国家自然科学基金(11661022),贵州省科技计划课题(黔科合平台人才[2017]5726-39)和贵州师范大学学术新苗基金(黔师新苗[2021]A04 号)资助项目.

通信作者:安 静(1979—),男,贵州思南人,教授,博士,博士生导师,主要从事偏微分方程数值解研究. E-mail: aj154@163.com

$$\begin{cases} \Delta^2 \psi - \alpha \Delta \psi + \beta \psi = g, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \psi = \partial \psi / \partial \mathbf{n} = 0, & \text{在 } \partial \Omega \text{ 上,} \end{cases} \quad (1)$$

其中 α, β 是非负常数, \mathbf{n} 是单位外法向量, Ω 是在 \mathbb{R}^d 中的有界区域.

令 $u = -\Delta \psi$, 则方程组 (1) 等价于 2 阶混合格式:

$$\begin{cases} -\Delta \psi = u, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ -\Delta u + \alpha u + \beta \psi = g, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \psi = \partial \psi / \partial \mathbf{n} = 0, & \text{在 } \partial \Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (2)$$

令 $L^2(\Omega)$ 、 $H^m(\Omega)$ 和 $H_0^m(\Omega)$ 为通常的 Sobolev 空间, $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_m$ 分别为在 $L^2(\Omega)$ 与 $H^m(\Omega)$ 或 $H_0^m(\Omega)$ 中的范数, $|\cdot|_m$ 为在 $H^m(\Omega)$ 或 $H_0^m(\Omega)$ 中的半范数. 设 $V = H^1(\Omega)$, $M = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} uv \, dx, b(u, \psi) = - \int_{\Omega} u \psi \, dx.$$

则式 (2) 的弱形式是: 求 $(u, \psi) \in V \times M$, 使得

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, \psi) = 0, & \forall v \in V, \\ -b(u, \varphi) + (\alpha u, \varphi) + (\beta \psi, \varphi) = (g, \varphi), & \forall \varphi \in M. \end{cases} \quad (3)$$

不失一般性, 现在仅考虑 $\Omega = [-1, 1]^2$ 的情况. 设 P_N 为在区间 $[-1, 1]$ 上次数不超过 N 的多项式空间, 定义逼近空间 $V_N = (P_N \times P_N) \cap H^1(\Omega)$ 和 $M_N = (P_N \times P_N) \cap H_0^1(\Omega)$, 则式 (3) 的离散格式是: 求 $(u_N, \psi_N) \in V_N \times M_N$, 使得

$$\begin{cases} a(u_N, v_N) + b(v_N, \psi_N) = 0, & \forall v_N \in V_N, \\ -b(u_N, \varphi_N) + (\alpha u_N, \varphi_N) + (\beta \psi_N, \varphi_N) = (g, \varphi_N), & \forall \varphi_N \in M_N. \end{cases}$$

定理 1 4 阶问题 (1) 与混合变分问题 (3) 等价.

证 若 ψ 为式 (1) 的解, 则由格林公式得 $(u = -\Delta \psi, \psi)$ 为式 (3) 的解. 反之, 若 (u, ψ) 为式 (3) 的解, 则 $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$, 由格林公式得

$$\begin{aligned} -b(u, \varphi) &= \int_{\Omega} u \varphi \, dx = \int_{\partial \Omega} \partial u / \partial \mathbf{n} (\varphi) \, dS - \int_{\Omega} \Delta u \cdot \varphi \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \Delta u \varphi \, dx. \end{aligned}$$

将上式代入式 (3) 的第 2 个等式, 有

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + \alpha u + \beta \psi - g) \varphi \, dx = 0.$$

由变分法基本引理得

$$-\Delta u + \alpha u + \beta \psi = g. \quad (4)$$

同理, 由变分法基本引理、格林公式和式 (3) 的第 1 个等式得

$$u = -\Delta \psi. \quad (5)$$

另外, $\forall v \in H^1(\Omega)$, 由式 (3) 的第 1 个等式得

$$\int_{\Omega} (u + \Delta \psi) v \, dx - \int_{\partial \Omega} (v \partial \psi / \partial \mathbf{n}) \, dS = 0. \quad (6)$$

在式 (6) 中取 $v = \partial \psi / \partial \mathbf{n}$, 结合式 (5), 有 $\psi|_{\partial \Omega} =$

$(\partial \psi / \partial \mathbf{n})|_{\partial \Omega} = 0$. 再将式 (5) 代入式 (4) 可得 ψ 为式 (1) 的解.

2 逼近解的误差估计

在这一节中给出逼近解的误差估计. 用 $a \leq b$ 表示 $a \leq Cb$, 其中 C 是大于 0 的常数. 为了简洁起见, 仅考虑 $\alpha = \beta = 0$ 的情形, 此时式 (1) 等价于

$$\begin{cases} \Delta^2 \psi = g, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \psi = \partial \psi / \partial \mathbf{n} = 0, & \text{在 } \partial \Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (7)$$

方程组 (7) 等价的 2 阶混合格式为

$$\begin{cases} -\Delta \psi = u, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ -\Delta u = g, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \psi = \partial \psi / \partial \mathbf{n} = 0, & \text{在 } \partial \Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (8)$$

则式 (8) 的弱形式为: 求 $(u, \psi) \in V \times M$, 使得

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, \psi) = 0, & \forall v \in V, \\ -b(u, \varphi) = (g, \varphi), & \forall \varphi \in M. \end{cases} \quad (9)$$

式 (9) 的离散格式为: 求 $(u_N, \psi_N) \in V_N \times M_N$, 使得

$$\begin{cases} a(u_N, v_N) + b(v_N, \psi_N) = 0, & \forall v_N \in V_N, \\ -b(u_N, \varphi_N) = (g, \varphi_N), & \forall \varphi_N \in M_N. \end{cases} \quad (10)$$

定理 2 混合变分问题 (9) 和离散变分问题 (10) 存在唯一的解.

证 仅给出混合变分问题 (9) 解的存在唯一性证明, 离散变分问题 (10) 解的存在唯一性可以类似地推导. 由于在文献 [17] 中 1.6.1 节已经证明了问题 (7) 存在广义解 $\psi \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, 由定理 1 知 $(u, \psi) = (-\Delta \psi, \psi) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ 为问题 (9) 的一个解. 现只需证明混合变分问题 (9) 的解是唯一的.

令 $g=0$, 在式 (9) 中取 $v=u, \varphi=\psi$, 有 $a(u, u) = \int_{\Omega} u^2 \, dx = 0$, 即 $u=0$. 再将 $u=0$ 代入式 (9) 的第 1 式, 有

$$b(v, \psi) = - \int_{\Omega} v \psi \, dx = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (11)$$

在式 (11) 中取 $v=\psi \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, 有

$$b(\psi, \psi) = - \int_{\Omega} |\psi|^2 \, dx = 0,$$

即 $|\psi|_1^2 = 0$. 由 Poincaré 不等式可知 $|\cdot|_1$ 与 $\|\cdot\|_1$ 等价, 从而有 $\psi=0$. 即当 $g=0$ 时, 混合变分问题 (9) 只有零解. 因此混合变分问题 (9) 的解是唯一的. 通过类似地推导可证明离散变分问题 (10) 的解也是唯一的.

引理 1 $a(u, v)$ 和 $b(v, \varphi)$ 是分别定义在 $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 和 $H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ 上的有界线性泛函, 即 $|a(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$, $|b(v, \varphi)| \leq \|v\|_1 \|\varphi\|_1$.

证 由 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$|a(u, v)| = \left| \int_{\Omega} uv \, dx \right| \leq \|u\| \|v\|, \quad |b(v, \varphi)| = \left| - \int_{\Omega} v \varphi \, dx \right| \leq \|v\| \|\varphi\| = \|v\|_1 \|\varphi\|_1 \leq \|v\|_1 \|\varphi\|_1.$$

引理 2 $b(\cdot, \cdot)$ 满足连续的 BB 条件, 即

$$\sup_{v \in H^1(\Omega)} (b(v, \varphi) / \|v\|_1) \geq \beta \|\varphi\|_1, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

其中 β 是一个大于 0 的常数.

证 $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$, 由 Poincaré 不等式可知, 存在一个大于零的常数 c , 使得 $\|\varphi\|_1 \leq c \|\varphi\|_1$, $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$. 则

$$\begin{aligned} \sup_{v \in H^1(\Omega)} (b(v, \varphi) / \|v\|_1) &\geq b(-\varphi, \varphi) / \|-\varphi\|_1 = \\ &= - \int_{\Omega} (\varphi(-\varphi)) \, dx / \|\varphi\|_1 = \int_{\Omega} (\varphi^2) \, dx / \|\varphi\|_1 = \\ &= \|\varphi\|_1^2 / \|\varphi\|_1 \geq \|\varphi\|_1^2 / (c^2 \|\varphi\|_1) = \|\varphi\|_1 / c^2 = \beta \|\varphi\|_1. \end{aligned}$$

故 $b(\cdot, \cdot)$ 满足连续的 BB 条件.

定义离散 BB 条件

$$\sup_{v \in V_N} (|b(v, \varphi)| / \|v\|_1) \geq \beta_0 \|\varphi\|_1, \quad \forall \varphi \in M_N, \quad (12)$$

其中 β_0 是一个大于 0 的常数.

引理 3 若 $b(\cdot, \cdot)$ 满足连续的 BB 条件, 并且存在投影算子 $\Lambda_N: V \rightarrow V_N$ 使得

$$b(v - \Lambda_N v, \mu) = 0, \quad \forall \mu \in M_N, \quad (13)$$

并且满足

$$\|\Lambda_N v\|_1 \leq c \|v\|_1, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad (14)$$

则离散 BB 条件 (12) 成立.

证 由式 (13) 可知, $\forall \varphi \in M_N$, 有 $b(v, \varphi) = b(\Lambda_N v, \varphi)$. 由式 (14) 可得

$$b(v, \varphi) / \|v\|_1 = b(\Lambda_N v, \varphi) / \|\Lambda_N v\|_1 \leq b(\Lambda_N v, \varphi) / (\|\Lambda_N v\|_1 / c) \leq c \sup_{v_N \in V_N} (b(v_N, \varphi) / \|v_N\|_1).$$

由于 $b(\cdot, \cdot)$ 满足连续的 BB 条件, 即

$$\sup_{v \in V} (b(v, \varphi) / \|v\|_1) \geq \beta \|\varphi\|_1, \quad \forall \varphi \in M.$$

所以, $\forall \varphi \in M_N \subset M$, 有

$$\beta \|\varphi\|_1 \leq \sup_{v \in V} (b(v, \varphi) / \|v\|_1) \leq c \sup_{v_N \in V_N} (b(v_N, \varphi) / \|v_N\|_1),$$

$$\text{即 } \sup_{v_N \in V_N} (b(v_N, \varphi) / \|v_N\|_1) \geq \beta \|\varphi\|_1 / c = \beta_0 \|\varphi\|_1, \quad \forall \varphi \in M_N.$$

引理 4 设 (u, ψ) 和 (u_N, ψ_N) 分别为变分形式 (9) 和离散格式 (10) 的解, 则

$$\|u - u_N\| \leq 2 \inf_{v_N \in Z_N(\varphi)} \|u - v_N\| + c_N \inf_{\varphi_N \in M_N(\varphi)} \|\psi - \varphi_N\|_1,$$

其中 $Z_N(\varphi) = \{v_N: v_N \in V_N, -b(v_N, \varphi_N) = (g, \varphi_N)\}$,

$$\forall \varphi_N \in M_N\}.$$

证 令 $w_N = v_N - u_N$, 则有 $a(w_N, w_N) = a(v_N - u, w_N) + a(u - u_N, w_N)$. 由式 (9) 和式 (10) 可得

$$a(u - u_N, w_N) = a(u, w_N) - a(u_N, w_N) = -b(w_N, \psi) + b(w_N, \psi_N) = b(w_N, \psi_N - \psi), \quad \forall w_N \in V_N.$$

由于 $b(v_N - u_N, \varphi_N) = 0, \forall v_N \in Z_N(\varphi), \forall \varphi_N \in M_N$, 所以

$$a(u - u_N, v_N - u_N) = b(v_N - u_N, \varphi_N - \psi), \quad \forall v_N \in Z_N(\varphi), \forall \varphi_N \in M_N.$$

因为 V_N 是有限维的, $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|$ 在 V_N 中是等价的, 因此存在一个常数 c_N , 使得 $\|v_N\|_1 \leq c_N \|v_N\|, \forall v_N \in V_N$. 再利用引理 1 得

$$\begin{aligned} \|v_N - u_N\|^2 &= a(v_N - u_N, v_N - u_N) = a(v_N - u, v_N - u_N) + a(u - u_N, v_N - u_N) = a(v_N - u, v_N - u_N) + b(v_N - u_N, \varphi_N - \psi) \\ &\leq \|v_N - u\| \|v_N - u_N\| + \|v_N - u_N\|_1 \|\varphi_N - \psi\|_1 \leq \|v_N - u\| \|v_N - u_N\| + c_N \|\varphi_N - \psi\|_1 \|v_N - u_N\|, \end{aligned}$$

即 $\|v_N - u_N\| \leq \|v_N - u\| + c_N \|\psi - \varphi_N\|_1$, 则有

$$\begin{aligned} \|u - u_N\| &\leq \|u - v_N\| + \|v_N - u_N\| \leq \|u - v_N\| + \|v_N - u\| + c_N \|\psi - \varphi_N\|_1 = 2 \|u - v_N\| + c_N \|\psi - \varphi_N\|_1. \end{aligned}$$

由 v_N 和 φ_N 的任意性可得

$$\|u - u_N\| \leq 2 \inf_{v_N \in Z_N(\varphi)} \|u - v_N\| + c_N \inf_{\varphi_N \in M_N(\varphi)} \|\psi - \varphi_N\|_1.$$

令 $J_n^{\alpha, \beta}(\alpha, \beta > -1)$ 为通常的 Jacobi 多项式, $\omega^{\alpha, \beta}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ 表示 Jacobi 权函数, 则定义广义 Jacobi 多项式如下:

$$J_n^{p, q}(x) = \begin{cases} (1-x)^{-p} (1+x)^{-q} J_{n-n_0}^{p, -q}(x), & p, q \leq -1, \\ (1-x)^{-p} J_{n-n_0}^{p, q}(x), & p \leq -1, q > -1, \\ (1+x)^{-q} J_{n-n_0}^{p, -q}(x), & p > -1, q \leq -1, \end{cases}$$

其中 $n_0 \leq n$, 且

$$n_0 = n_0(p, q) = \begin{cases} -(p+q), & p, q \leq -1, \\ -p, & p \leq -1, q > -1, \\ -q, & p > -1, q \leq -1. \end{cases}$$

令 $\hat{J}_n^{p, q}$ 为标准的 Jacobi 多项式, 即 $\int_{-1}^1 \hat{J}_n^{p, q}(x) \cdot$

$\hat{J}_m^{p, q}(x) \omega^{p, q}(x) \, dx = \delta_{mn}$. 定义 d 维张量形式的 Jacobi 多项式和权函数:

$$J_n^{p, q}(x) = \prod_{i=1}^d \hat{J}_{n_i}^{p_i, q_i}(x_i), \quad \omega^{p, q}(x) = \prod_{i=1}^d \omega^{p_i, q_i}(x_i),$$

其中 $x \in I^d, n = (n_1, n_2, \dots, n_d) \in \mathbf{N}^d, q = (q_1, q_2, \dots, q_d), p = (p_1, p_2, \dots, p_d)$. 定义 2 维 N 次多项式空间 $Q_N^{p, q} = \text{span}\{J_n^{p, q}(x) : |n|_1 \leq N\}$, 其中 $p = (-1, -1), q = (-1, -1), |n|_1 = \max_{1 \leq i \leq 2} \{n_i\}$. 显然, $Q_N^{p, q} = M_N$.

定义正交投影 $\pi_N^{p, q}: L_{\omega^{p, q}}^2(\Omega) \rightarrow Q_N^{p, q}$, 使得

$$\int_{\Omega} (\pi_N^{p, q} u - u) v_N \omega^{p, q} \, dx = 0, \quad \forall v_N \in Q_N^{p, q}.$$

定义非一致带权 Sobolev 空间

$$B_{p,q}^s(\Omega) = \{u: \partial_x^m u \in L_{\omega^{p+m,q+m}}^2(I^2), 0 \leq |m| \leq s\}, \forall s \in \mathbf{N}.$$

其半范数和范数分别为

$$|u|_{B_{p,q}^s(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^2 \|\partial_{x_i}^s u\|_{\omega^{p+se_i, q+se_i, \Omega}}^2 \right)^{1/2},$$

$$\|u\|_{B_{p,q}^s(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |m| \leq s} \|\partial_x^m u\|_{\omega^{p+m, q+m, \Omega}}^2 \right)^{1/2},$$

其中 $m = (m_1, m_2) \in \mathbf{N}^2$, $|m|_1 = m_1 + m_2$, $\partial_x^m u = \partial_{x_1}^{m_1} \partial_{x_2}^{m_2} u$, e_i 为在 \mathbf{R}^2 中的第 i 个单位向量.

由文献[16]中的定理 8.1 和注记 8.14 有下面的引理.

引理 5 $\forall u \in B_{p,q}^s(\Omega)$ 和 $1 \leq s \leq N+1$, 则不等式

$$|\pi_N^{p,q} u - u|_{B_{p,q}^1(\Omega)} \leq C((N-s)!/(N-1)!)^{1/2} \cdot (N+s)^{(1-s)/2} |u|_{B_{p,q}^s(\Omega)}$$

成立, 其中当 $N \gg 1$ 时, $C \approx \sqrt{2}$.

定义投影算子 $\pi_N: H^1(I^d) \rightarrow P_N^d$, 使得

$$(\pi_N(u - \pi_N u), v_N) + (u - \pi_N u, v_N) = 0, \forall v_N \in P_N^d.$$

由文献[16]中的定理 8.4 有下面的引理.

引理 6 $\forall u \in H^s(I^d) (s \geq 1)$, 则有

$$\|u - \pi_N^1 u\|_l \leq N^{-s} \|u\|_s, s \geq l \geq 0, s \geq 1.$$

定理 3 设 (u, ψ) 和 (u_N, ψ_N) 分别为变分形式 (9) 和离散格式 (10) 的解, 则

$$\|u - u_N\| \leq N^{1-s} (N^{-1} \|u\|_s + |\psi|_{B_{p,q}^s(\Omega)}).$$

证 由于

$$|\psi - \varphi_N|_{1,\Omega} = \left(\int_{\Omega} ((\partial_{x_1}(\psi - \varphi_N))^2 + (\partial_{x_2}(\psi - \varphi_N))^2) dx_1 \cdot \right.$$

$$dx_2)^{1/2} \leq \left(\int_{\Omega} ((\partial_{x_1}(\psi - \varphi_N))^2 \omega^{p+e_1, q+e_1} + (\partial_{x_2}(\psi - \varphi_N))^2 \cdot \right.$$

$$\omega^{p+e_2, q+e_2}) dx_1 dx_2)^{1/2} = (\|\partial_{x_1}(\psi - \varphi_N)\|_{\omega^{p+e_1, q+e_1, \Omega}}^2 +$$

$$\|\partial_{x_2}(\psi - \varphi_N)\|_{\omega^{p+e_2, q+e_2, \Omega}}^2)^{1/2} = |\psi - \varphi_N|_{B_{p,q}^1(\Omega)},$$

$$\text{所以, } \inf_{\varphi_N \in M_N(\varphi)} |\psi - \varphi_N|_{1,\Omega} \leq \inf_{\varphi_N \in M_N(\varphi)} |\psi - \varphi_N|_{B_{p,q}^1(\Omega)}.$$

由 Poincaré 不等式和引理 4~6 可得

$$\|u - u_N\| \leq 2 \inf_{v_N \in Z_N(\varphi)} \|u - v_N\| + c_N \inf_{\varphi_N \in M_N(\varphi)} \|\psi - \varphi_N\|_1 \leq 2 \inf_{v_N \in Z_N(\varphi)} \|u - v_N\| + c_N \inf_{\varphi_N \in M_N(\varphi)} |\psi - \varphi_N|_{1,\Omega} \leq$$

$$2 \inf_{v_N \in Z_N(\varphi)} \|u - v_N\| + c_N \inf_{\varphi_N \in M_N(\varphi)} |\psi - \varphi_N|_{B_{p,q}^1(\Omega)} \leq 2 \|u - \pi_N^1 u\| + c_N |\pi_N^{p,q} \psi - \psi|_{B_{p,q}^1(\Omega)} \leq N^{-s} \|u\|_s + ((N-s)!/(N-1)!)^{1/2} (N+s)^{(1-s)/2} |\psi|_{B_{p,q}^s(\Omega)}.$$

由文献[16]中的 (3.5.32) 可得

$$\|u - u_N\| \leq N^{1-s} (N^{-1} \|u\|_s + |\psi|_{B_{p,q}^s(\Omega)}).$$

引理 7 若离散 BB 条件 (12) 成立, 则下列估

计式成立:

$$\|\psi - \psi_N\|_1 \leq \|u - u_N\| + \inf_{\varphi_N \in M_N(\varphi)} \|\psi - \varphi_N\|_1.$$

证 由于

$$b(v_N, \psi_N - \varphi_N) = b(v_N, \psi_N - \psi) + b(v_N, \psi - \varphi_N) = a(u - u_N, v_N) + b(v_N, \psi - \varphi_N),$$

所以结合式 (12) 和引理 1 可得

$$\beta_0 \|\psi_N - \varphi_N\|_1 \leq \sup_{v_N \in V_N} (b(v_N, \psi_N - \varphi_N) / \|v_N\|_1) \leq$$

$$\|u - u_N\| + \|\psi - \varphi_N\|_1.$$

则 $\|\psi_N - \varphi_N\|_1 \leq \beta_0^{-1} \|u - u_N\| + \beta_0^{-1} \|\psi - \varphi_N\|_1$. 又由于 $\|\psi - \psi_N\|_1 \leq \|\psi - \varphi_N\|_1 + \|\psi_N - \varphi_N\|_1$, 所以,

$$\|\psi - \psi_N\|_1 \leq \|\psi - \varphi_N\|_1 + \beta_0^{-1} \|u - u_N\| + \beta_0^{-1} \|\psi - \varphi_N\|_1 \leq \|u - u_N\| + \|\psi - \varphi_N\|_1,$$

由 φ_N 的任意性可得

$$\|\psi - \psi_N\|_1 \leq \|u - u_N\| + \inf_{\varphi_N \in M_N(\varphi)} \|\psi - \varphi_N\|_1.$$

定理 4 若离散 BB 条件 (12) 成立, 则有

$$\|\psi - \psi_N\|_1 \leq N^{1-s} (N^{-1} \|u\|_s + |\psi|_{B_{p,q}^s(\Omega)}).$$

证 由 Poincaré 不等式, 引理 5 和文献[16]中的 (3.5.32) 得

$$\inf_{\varphi_N \in M_N(\varphi)} \|\psi - \varphi_N\|_1 \leq \inf_{\varphi_N \in M_N(\varphi)} |\psi - \varphi_N|_{1,\Omega} \leq \inf_{\varphi_N \in M_N(\varphi)} |\psi - \varphi_N|_{B_{p,q}^1(\Omega)} \leq |\pi_N^{p,q} \psi - \psi|_{B_{p,q}^1(\Omega)} \leq ((N-s)!/(N-1)!)^{1/2} (N+s)^{(1-s)/2} |\psi|_{B_{p,q}^s(\Omega)} \leq N^{1-s} |\psi|_{B_{p,q}^s(\Omega)}.$$

则由定理 3 和引理 7 可得

$$\|\psi - \psi_N\|_1 \leq \|u - u_N\| + \inf_{\varphi_N \in M_N(\varphi)} \|\psi - \varphi_N\|_1 \leq N^{1-s} (N^{-1} \|u\|_s + |\psi|_{B_{p,q}^s(\Omega)}).$$

3 算法的有效实现

本部分将详细地描述算法的有效实现. 首先构造在逼近空间中的一组基函数, 用 $L_n(x_1)$ 表示 n 次 Legendre 多项式. 记

$$\eta_i(x_1) = L_i(x_1) - L_{i+2}(x_1) \quad (i=0, 1, 2, \dots, N-2),$$

$$\varphi_i(x_1) = \eta_i(x_1) \quad (i=0, 1, 2, \dots, N-2),$$

$$\varphi_{N-1}(x_1) = 1, \varphi_N(x_1) = (1+x_1)/2.$$

则有

$$M_N = \text{span}\{\eta_i(x_1) \eta_j(x_2), i, j=0, 1, 2, \dots, N-2\},$$

$$V_N = \text{span}\{\varphi_i(x_1) \varphi_j(x_2), i, j=0, 1, 2, \dots, N\}.$$

记

$$s_{kj} = \int_{-1}^1 \varphi_j' \varphi_k' dx_1, a_{kj} = \int_{-1}^1 \varphi_j \varphi_k dx_1, b_{kj} = \int_{-1}^1 \eta_j' \cdot$$

$$\varphi_k' dx_1, c_{kj} = \int_{-1}^1 \eta_j \varphi_k dx_1, d_{kj} = \int_{-1}^1 \eta_j' \eta_k' dx_1, e_{kj} = \int_{-1}^1 \varphi_j \cdot$$

$$\eta_k dx_1, h_{kj} = \int_{-1}^1 \eta_j \eta_k dx_1.$$

令

$$u_N = \sum_{i,j=0}^N u_{ij} \varphi_i(x_1) \varphi_j(x_2), \psi_N = \sum_{i,j=0}^{N-2} \psi_{ij} \eta_i(x_1) \eta_j(x_2),$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N0} & u_{N1} & \cdots & u_{NN} \end{pmatrix},$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{00} & \psi_{01} & \cdots & \psi_{0,N-2} \\ \psi_{10} & \psi_{11} & \cdots & \psi_{1,N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{N-2,0} & \psi_{N-2,1} & \cdots & \psi_{N-2,N-2} \end{pmatrix}.$$

用 \bar{U} 表示由 U 的列构成的长度为 $(N+1)^2$ 的列向量. 用 $\bar{\Psi}$ 表示由 Ψ 的列构成的长度为 $(N-1)^2$ 的列向量, 对

$$v_N = \varphi_m(x_1) \varphi_n(x_2), m, n = 0, 1, 2, \cdots, N,$$

$$\varphi_N = \eta_k(x_1) \eta_l(x_2), k, l = 0, 1, 2, \cdots, N-2$$

有

$$\begin{aligned} a(u_N, v_N) &= \int_{\Omega} u_N v_N dx = \sum_{i,j=0}^N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \varphi_i(x_1) \varphi_j(x_2) \cdot \\ &\varphi_m(x_1) \varphi_n(x_2) dx u_{ij} = \sum_{i,j=0}^N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \varphi_i(x_1) \varphi_m(x_1) \varphi_j(x_2) \cdot \\ &\varphi_n(x_2) dx u_{ij} = \sum_{i,j=0}^N \int_{-1}^1 \varphi_i(x_1) \varphi_m(x_1) dx_1 \int_{-1}^1 \varphi_j(x_2) \cdot \\ &\varphi_n(x_2) dx_2 u_{ij} = \sum_{i,j=0}^N a_{mi} a_{nj} u_{ij} = A(m, \cdot) U A(n, \cdot)^T = \\ &A(n, \cdot) \otimes A(m, \cdot) \bar{U}, b(v_N, \psi_N) = - \int_{\Omega} v_N \psi_N dx = \\ &- \sum_{i,j=0}^{N-2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\varphi'_m(x_1) \varphi_n(x_2), \varphi_m(x_1) \varphi'_n(x_2)) (\eta'_i(x_1) \cdot \\ &\eta_j(x_2), \eta_i(x_1) \eta'_j(x_2)) dx \psi_{ij} = - \sum_{i,j=0}^{N-2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\varphi'_m(x_1) \cdot \\ &\varphi_n(x_2) \eta'_i(x_1) \eta_j(x_2) + \varphi_m(x_1) \varphi'_n(x_2) \eta_i(x_1) \cdot \\ &\eta'_j(x_2)) dx \psi_{ij} = - \sum_{i,j=0}^{N-2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\varphi'_m(x_1) \eta'_i(x_1) \varphi_n(x_2) \cdot \\ &\eta_j(x_2) + \varphi_m(x_1) \eta_i(x_1) \varphi'_n(x_2) \eta'_j(x_2)) dx \psi_{ij} = \end{aligned}$$

表 1 对于不同的 N , 逼近解 $\psi_N(x_1, x_2)$ 与精确解 $\psi(x_1, x_2)$ 在 3 种范数下的误差

误差	$N=10$	$N=15$	$N=20$	$N=25$	$N=30$	$N=35$
$\ \psi - \psi_N\ $	0.001 2	$1.032 0 \times 10^{-7}$	$2.286 7 \times 10^{-11}$	$2.308 6 \times 10^{-15}$	$8.636 4 \times 10^{-15}$	$4.185 8 \times 10^{-15}$
$ \psi - \psi_N _1$	0.089 5	$1.683 5 \times 10^{-4}$	$9.637 1 \times 10^{-9}$	$1.785 1 \times 10^{-12}$	$2.817 3 \times 10^{-14}$	$3.714 8 \times 10^{-14}$
$\ \psi - \psi_N\ _1$	0.089 6	$1.683 5 \times 10^{-4}$	$9.637 2 \times 10^{-9}$	$1.785 1 \times 10^{-12}$	$2.946 7 \times 10^{-14}$	$3.738 3 \times 10^{-14}$

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=0}^{N-2} (b_{mi} c_{nj} + c_{mi} b_{nj}) \psi_{ij} &= - (B(m, \cdot) \Psi C(n, \cdot)^T + \\ C(m, \cdot) \Psi B(n, \cdot)^T) &= - (C(n, \cdot) \otimes B(m, \cdot) + \\ B(n, \cdot) \otimes C(m, \cdot)) \bar{\Psi}. \end{aligned}$$

同理, 有

$$\begin{aligned} b(u_N, \varphi_N) &= -(E(l, \cdot) \otimes D(k, \cdot) + D(l, \cdot) \otimes \\ E(k, \cdot)) \bar{U}, (u_N, \varphi_N) &= E(l, \cdot) \otimes E(k, \cdot) \bar{U}, \\ (\psi_N, \varphi_N) &= H(l, \cdot) \otimes H(k, \cdot) \bar{\Psi}. \end{aligned}$$

其中 $S = (s_{ij})$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$, $D = (d_{ij})$, $E = (e_{ij})$, $H = (h_{ij})$, \otimes 表示矩阵的张量积, 即 $A \otimes B = (a_{ij} B)$, $A(m, \cdot)$ 表示矩阵 $A = (a_{ij})$ 的第 m 行, 令

$$\begin{aligned} A_1 &= A(n, \cdot) \otimes A(m, \cdot), A_2 = -(C(n, \cdot) \otimes \\ B(m, \cdot) + B(n, \cdot) \otimes C(m, \cdot)), A_3 &= E(l, \cdot) \otimes \\ D(k, \cdot) + D(l, \cdot) \otimes E(k, \cdot), A_4 &= \alpha E(l, \cdot) \otimes \\ E(k, \cdot), A_5 &= \beta H(l, \cdot) \otimes H(k, \cdot). \end{aligned}$$

于是式(3)的离散格式等价于如下矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 + A_4 & A_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{\Psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O \\ F \end{pmatrix},$$

其中 $F = (f_0, f_1, f_2, \cdots, f_{N-2})^T$, $f_i = \int_{\Omega} g \varphi_i dx$.

4 数值实验

为了表明算法的收敛性和高精度, 将在 MATLAB R2017a 平台上进行一系列的数值实验.

例 1 取 $\alpha = \beta = 1$, 精确解 $\psi(x_1, x_2) = (\sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2))^2$, 则 $\psi(x_1, x_2)$ 显然满足方程(1)的边界条件, 再将 $\psi(x_1, x_2)$ 代入方程(1)第 1 式得右端的 $g(x_1, x_2)$. 用第 3 节提出的算法求解问题(1), 对于不同的 N , 在表 1 中列出了逼近解 $\psi_N(x_1, x_2)$ 与精确解 $\psi(x_1, x_2)$ 在 3 种范数下的误差. 为了更直观地表明算法的收敛性和高精度, 在图 1 和图 2 中分别画出了精确解与在 $N=60$ 时的逼近解的图像, 并在图 3 和图 4 中分别画出了精确解与在 N 取不同值时的逼近解之间的误差图像.

从表 1 可知,当 $N \geq 30$ 时, $\psi - \psi_N$ 的 3 种范数都达到 10^{-14} 左右精度. 从图 1~图 4 进一步观察到本文的算法是收敛的和高精度的.

例 2 取 $\alpha = \beta = 0$, 精确解 $\psi(x_1, x_2) = (\sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2))^2 \sin(2x_1 + 2x_2)$, 则 $\psi(x_1, x_2)$ 也满足方程(1)的边界条件. 类似地, 将 $\psi(x_1, x_2)$ 代入

方程(1)第 1 式可得右端的 $g(x_1, x_2)$. 对于不同的 N , 在表 2 中也列出了逼近解 $\psi_N(x_1, x_2)$ 与精确解 $\psi(x_1, x_2)$ 在 3 种范数下的误差. 在图 5 和图 6 中分别画出了精确解与在 $N=60$ 时的逼近解的图像, 并在图 7 和图 8 中分别画出了精确解与在 N 取不同值时的逼近解之间的误差图像.

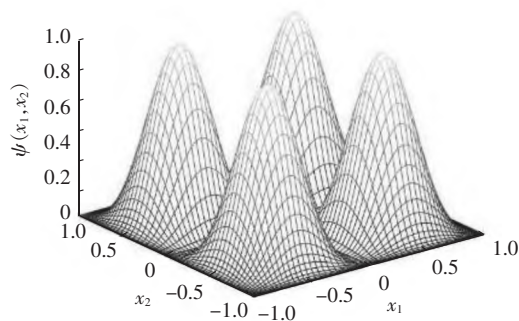


图 1 精确解的图像

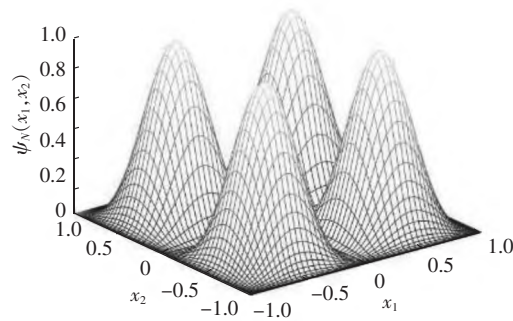


图 2 在 $N=60$ 时的逼近解图像

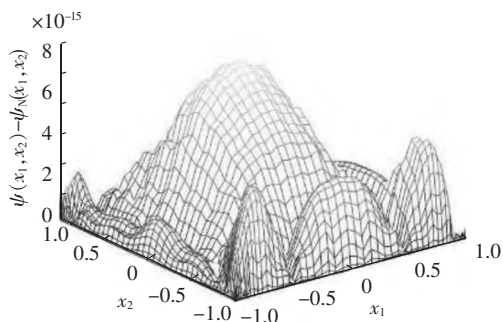


图 3 精确解与在 $N=50$ 时逼近解之间的误差图像

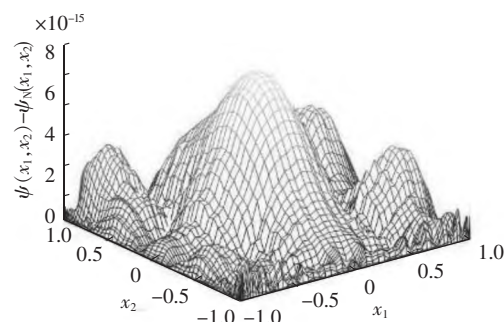


图 4 精确解与在 $N=60$ 时逼近解之间的误差图像

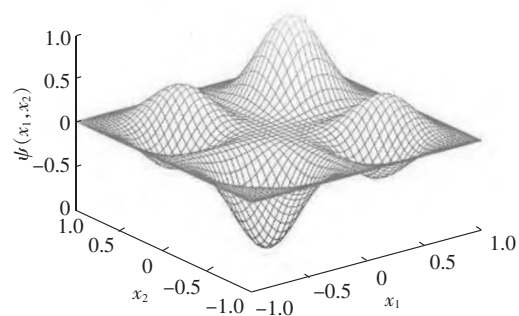


图 5 精确解的图像

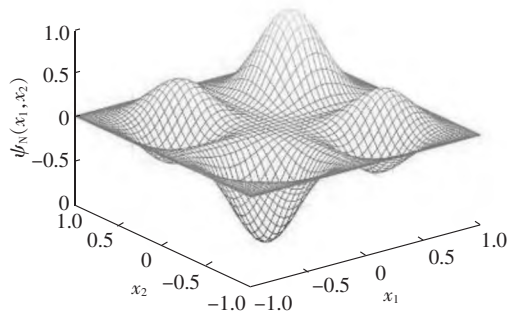


图 6 在 $N=60$ 时的逼近解图像

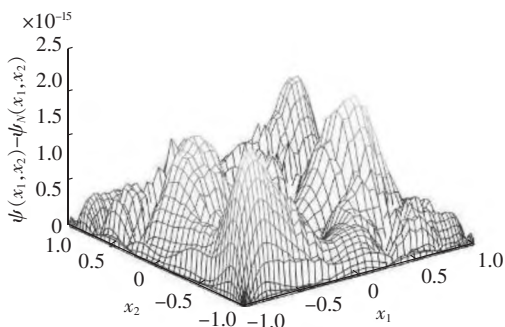


图 7 精确解与在 $N=50$ 时的逼近解之间的误差图像

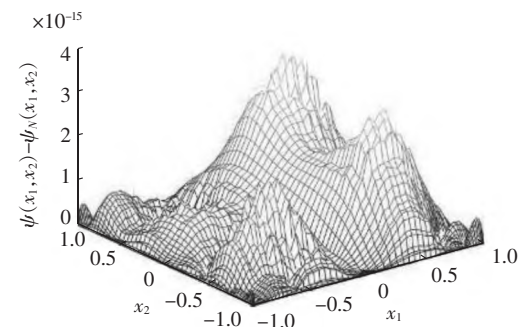


图 8 精确解与在 $N=60$ 时的逼近解之间的误差图像

表 2 对于不同的 N ,逼近解 $\psi_N(x_1,x_2)$ 与精确解 $\psi(x_1,x_2)$ 在 3 种范数下的误差

误差	$N=10$	$N=15$	$N=20$	$N=25$	$N=30$	$N=35$
$\ \psi-\psi_N\ $	0.010 5	$8.431\ 1\times10^{-6}$	$3.274\ 7\times10^{-9}$	$2.511\ 9\times10^{-13}$	$2.523\ 1\times10^{-15}$	$1.556\ 0\times10^{-15}$
$ \psi-\psi_N _1$	0.647 2	0.003 7	$2.519\ 8\times10^{-6}$	$7.312\ 8\times10^{-10}$	$4.622\ 8\times10^{-14}$	$1.243\ 0\times10^{-14}$
$\ \psi-\psi_N\ _1$	0.647 3	0.003 7	$2.519\ 8\times10^{-6}$	$7.312\ 8\times10^{-10}$	$4.629\ 7\times10^{-14}$	$1.252\ 7\times10^{-14}$

从表 2 可知,当 $N\geqslant 30$ 时, $\psi-\psi_N$ 的 3 种范数都达到 10^{-14} 左右精度.从图 5~图 8 进一步观察到本文的算法是收敛的和高精度的.

5 结论

本文提出了 4 阶问题基于降阶格式的一种有效的谱 Galerkin 逼近.首先,建立了原问题基于降阶格式的弱形式及其离散格式;其次,从理论上严格证明了逼近解的误差估计;最后,还给出了算法的实现过程,并通过具体的数值算例来验证算法的有效性和理论结果的正确性.本文提出的算法可以结合谱元法应用到在更一般区域上复杂 4 阶问题的计算,这是将来进一步研究的工作内容.

6 参考文献

[1] LI Dong,QIAO Zhonghua. On the stabilization size of semi-implicit Fourier-spectral methods for 3D Cahn-Hilliard equations [J]. Communications in Mathematical Sciences,2017,15(6):1489-1506.

[2] GUO Ruihan,XU Yan. Semi-implicit spectral deferred correction method based on the invariant energy quadratization approach for phase field problems [J]. Communications in Computational Physics,2019,26(1):87-113.

[3] LIU Fei,SHEN Jie. Stabilized semi-implicit spectral deferred correction methods for Allen-Cahn and Cahn-Hilliard equations [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences,2015,38(18):4564-4575.

[4] SHEN Jie,YANG Xiaofeng. Numerical approximations of Allen-Cahn and Cahn-Hilliard equations [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems,2010,28(4):1669-1691.

[5] AN Jing,SHEN Jie. Spectral approximation to a transmission eigenvalue problem and its applications to an inverse problem [J]. Computers & Mathematics with Applications,2015,69(10):1132-1143.

[6] COLTON D,MONK P,SUN Jiguang. Analytical and com-

putational methods for transmission eigenvalues [J]. Inverse Problems,2010,26(4):45011.

[7] JI Xia,SUN Jiguang,XIE Hehu. A multigrid method for helmholtz transmission eigenvalue problems [J]. Journal of Scientific Computing,2014,60(2):276-294.

[8] SUN Jiguang. Iterative methods for transmission eigenvalues [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis,2011,49(5):1860-1874.

[9] YANG Yidu,BI Hai,HAN Jiayu,et al. Mixed methods for the helmholtz transmission eigenvalues [J]. SIAM Journal on Scientific Computing,2016,38(3):1383-1403.

[10] REN Shixian,TAN Ting,AN Jing. An efficient spectral-Galerkin approximation based on dimension reduction scheme for transmission eigenvalues in polar geometries [J]. Computers & Mathematics with Applications,2020,80(5):940-955.

[11] CANUTO C. Eigenvalue approximations by mixed methods [J]. RAIRO Analyse Numérique,1978,12(1):27-50.

[12] Mercier B,Osborn J E,Rappaz J,et al. Eigenvalue approximation by mixed and hybrid methods [J]. Mathematics of Computation,1981,36(154):427-453.

[13] CHEN Wei,LIN Qun. Approximation of an eigenvalue problem associated with the Stokes problem by the stream function-vorticity-pressure method [J]. Applications of Mathematics,2006,51(1):73-88.

[14] YANG Yidu,JIANG Wei. Upper spectral bounds and a posteriori error analysis of several mixed finite element approximations for the Stokes eigenvalue problem [J]. Science China:Mathematics,2013,56(6):1313-1330.

[15] SHEN Jie,TANG Tao. Spectral and high-order methods with applications [M]. Beijing:Science Press,2006.

[16] SHEN Jie,TANG Tao,WANG Lilian. Spectral methods:algorithms, analysis and applications [M]. New York:Springer Science & Business Media,2011.

[17] 罗振东. 混合有限元法基础及其应用 [M]. 北京:科学出版社,2006.

[18] 李开泰,黄艾香,黄庆怀. 有限元方法及其应用 [M]. 北京:科学出版社,2006. (下转第 570 页)

The Decision-Making of Remanufacturing Closed-Loop Supply Chain Considering Green Process Input and Recycling Effort

LIU Jian¹, XIE Jun^{1,2}

(1. School of Information Technology, Jiangxi University of Finance and Economic, Nanchang Jiangxi 330013, China;

2. School of Business Administration, Nanchang Institute of Technology, Nanchang Jiangxi 330099, China)

Abstract: For a remanufacturing closed-loop supply chain composed of the manufacturer and the distributor, considering the green process input and recycling effort, the two-stage Stackelberg game models dominated by the manufacturer are established under the two modes of the manufacturer recycling and the distributor recycling, thus analyzing the optimal decision-making of pricing, green process inputs, recycling efforts, and the profits. The results show that no matter who takes on recycling, the manufacturer should make great effort to improve its greenness of products. When the manufacturer recycles, the level of recycling effort is positively related to the cost difference between the production of new products and the remanufactured products. When the distributor recycles, the level of recycling effort is positively related to the compensation of unit recycling product. The manufacturer can gain more profit when the seller recycles, indicating that the manufacturer may prefer to entrust the recycling work to the seller. The research proves that improving the green production process and the recycling rate are important means to realize the recycling of waste products, and can provide reference for the decision-making of producers and distributors for price decision, green process investment and recycling efforts.

Key words: remanufacturing closed-loop supply chain; green process input; recycling effort; pricing

(责任编辑:曾剑锋)

(上接第 557 页)

The Efficient Legendre-Galerkin Approximation Based on Mixed Schemes for Fourth-Order Equations

WEI Tao, AN Jing^{*}

(School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou 550025, China)

Abstract: In this paper, the efficient Legendre-Galerkin approximation based on a mixed scheme is proposed for fourth-order equations. Firstly, by introducing an auxiliary function, the original problem is transformed into an equivalent second-order mixed scheme. Secondly, by introducing a class of suitable Sobolev spaces and their approximation spaces, the weak forms of the second-order mixed scheme and the corresponding discrete scheme are established. Then by using the approximation properties of orthogonal projection operators in non-uniform weighted Sobolev spaces, the error estimates of the approximation solutions is proved. In addition, the orthogonality of Legendre polynomials is used to construct a set of appropriate basis functions of the approximation space, so that the mass matrix and stiffness matrix in the discrete mixed variational form are all sparse, which can be quickly solved by using the conjugate gradient method. Finally, some numerical examples are given, and the numerical results show the effectiveness and high precision of our algorithm.

Key words: fourth order problem; mixed scheme; Legendre-Galerkin approximation; error estimation

(责任编辑:曾剑锋)