张晓媛,徐晓泉. 一个弱 sober 化不存在的例子[J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2023,47(6):558-561.
ZHANG Xiaoyuan,XU Xiaoquan. The example of nonexistence of weakly sobrification[J]. Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science),2023,47(6):558-561.

文章编号:1000-5862(2023)06-0558-04

一个弱 sober 化不存在的例子

张晓媛[1],徐晓泉[2*]
(1. 河北金融学院大数据科学学院, 河北 保定 071051;2. 闽南师范大学数学与统计学院, 福建 漳州 363000)

摘要:该文基于偏序集的 Alexandroff 空间说明了以拟 sober 空间(弱 sober 空间,cut 空间)为对象、以连续映射为态射的范畴 $QSob$($WSob$,Top_{cut})都不是Top_0 的反射子范畴.

关键词:拟 sober 空间; 弱 sober 空间; cut 空间; 反射子范畴
中图分类号:O 153.1 **文献标识码:**A **DOI:**10.16357/j.cnki.issn1000-5862.2023.06.02

0 引言

Sober 空间是在 Domain 理论和非 T_2 拓扑学中最重要的 T_0 空间之一. 随着 Domain 理论和非 T_2 拓扑学的发展, 弱 sober 空间、拟 sober 空间、cut 空间、有界 sober 空间、k-有界 sober 空间等各种弱化的 sober 空间引起了人们极大的研究兴趣[1-9].

为了拓展 sober 空间的理论框架, M. Erńe[2] 将 sober 性质进行弱化, 引入了 3 类弱的 sober 空间: 拟 sober 空间、弱 sober 空间和 cut 空间. 它们与 sober 空间的关系是:sober 空间⇒拟 sober 空间⇒弱 sober 空间⇒cut 空间. Wen Xinpeng 等[5] 研究了这 3 类弱的 sober 空间子空间、连续像和幂空间的性质, Zhang Xiaoyuan 等[10] 研究了这 3 类空间函数空间的性质. 以 T_0 空间为对象, 以连续映射为态射的范畴记为Top_0. Xu Xiaoquan 等[11] 证明了以所有拟 sober 空间(弱 sober 空间、cut 空间)为对象、以连续映射为态射的范畴不是Top_0 的反射子范畴.

不同于在文献[11]中的方法, 本文基于偏序集的 Alexandroff 空间说明了以拟 sober 空间(弱 sober 空间, cut 空间)为对象、以连续映射为态射的范畴 $QSob$、$WSob$、Top_{cut} 都不是Top_0 的反射子范畴.

1 预备知识

本节介绍所需的一些基本概念、记号和结论, 其余未提及的概念及符号参见文献[12-13].

设 P 为偏序集, $x\in P$, $A\subseteq P$,记 $\downarrow x=\{y\in P: y\leqslant x\}$, $\downarrow A=\bigcup_{a\in A}\downarrow a$,对偶地定义 $\uparrow x$ 和 $\uparrow A$. 若 $A=\uparrow A(A=\downarrow A)$, 则称 A 是上集(下集). 记 $P^{(<\omega)}$ 为 P 的所有有限子集. A 在 P 中的上确界(下确界)记作 sup A 或 $\vee A$(inf A 或 $\wedge A$). 非空子集 $D\subseteq P$ 被称为定向集,若在 D 中任意 2 个元素在 D 中都存在上界. 在 P 中所有定向集记为 $H(P)$. 若在偏序集 P 中任意定向集的上确界都存在, 则称 P 是定向完备偏序集, 简称 dcpo. 若在偏序集 P 中任意子集的上确界或下确界都存在, 则称 P 是完备格.

$A^{\uparrow}$ 和 $A^{\downarrow}$ 分别表示子集 A 在偏序集 P 中的全体上界和全体下界. 定义 $A^{\delta}=(A^{\uparrow})^{\downarrow}$, 此时称 A^{δ} 为 P 上的 Dedekind-MacNeille 完备化(或正规完备化)算子. 注意当 A 在 P 中存在上确界时, $x\in A^{\delta}$ 等价于 $x\leqslant \vee A$. 记 $\delta(P)=\{A^{\delta}:A\subseteq P\}$, 称其为 P 的 Dedekind-MacNeille 完备化(或正规完备化). 易验证在集合包含序下 $\delta(P)$ 是一个完备格. 称 A^{δ} 为 A 在 P 中的 cut 闭. 称 A 是 P 中的一个 cut,若 $A=A^{\delta}$.

命题 1[14] 设 P 是偏序集,$a,b\in P$,$A\subseteq P$,则下列各结论成立:

收稿日期:2023-09-15
基金项目:国家自然科学基金(12071199)和河北省教育厅科学研究课题(QN2023023)资助项目.
通信作者:徐晓泉(1961—), 男, 江西乐平人, 教授, 博士, 博士生导师, 主要从事一般拓扑学、格理论和 Domain 理论的研究. E-mail:xiqxu2002@163.com

1) $\varnothing^{\uparrow}=\varnothing^{\downarrow}=P$;

2) 若 $\vee A=a$,则 $A^{\delta}=\downarrow a$; 若 $\wedge A=b$,则 $A^{\downarrow\uparrow}=\uparrow b$;

3) 若 $a\in A^{\uparrow}$, 则 $a\in A^{\delta}$ 当且仅当 $a=\vee A$.

定义 1[12]　设 P 是偏序集.

1) P 的全体上集构成 P 的一个拓扑, 称之为 P 的 Alexandroff 拓扑, 记为 $\gamma(P)$. 称 $\Gamma(P)=(P,\gamma(P))$ 为 P 的 Alexandroff 拓扑空间.

2) 称 P 的子集 U 是 Scott 开的, 若 $U=\uparrow U$ 且对于任意 P 中存在上确界的定向集 D, $\vee D\in U$ 蕴含 $U\cap D\neq\varnothing$. 记 $\sigma(P)$ 为 P 上的 Scott 拓扑; 称 $\Sigma(P)=(P,\sigma(P))$ 为 P 的 Scott 拓扑空间.

定义 2[12]　设 X 是一个拓扑空间.

1) 称 X 中的非空子集 A 为既约的, 若对 X 中的任意闭集 B、C, $A\subseteq B\cup C$ 蕴含 $A\subseteq B$ 或者 $A\subseteq C$. 用 $M(X)$ ($M_c(X)$) 表示 X 中全体非空既约集(既约闭集).

2) 若 $\forall A\in M_c(X)$, 存在唯一的点 $a\in X$ 使 $A=\overline{\{a\}}$,则称 X 为 sober 的. 以 sober 空间为对象、连续映射为态射的范畴记为 Sob.

命题 2[12]　若 $f:X\to Y$ 连续且 $A\in M(X)$, 则 $f(A)\in M(Y)$.

定义 3[15]　设 X 为拓扑空间, $L\subseteq 2^X$, $A\subseteq X$. 记

$$\Diamond_L A=\{G\in L:G\cap A\neq\varnothing\}.$$

L 上以 $\{\Diamond U:U$ 开于 $X\}$ 为子基生成的拓扑被称为 lower Vietoris 拓扑,相应的拓扑空间记为 $P_H(L)$. 若 $L\subseteq M(X)$, 则 $\{\Diamond_L U:U$ 开于 $X\}$ 是 L 上的拓扑. 称空间 $P_H(\Gamma(X)\setminus\{\varnothing\})$ 为 X 的 Hoare 幂空间或下空间, 简记为 $P_H(X)$.

命题 3[12]　设 X 是 T_0 空间, $W\in M(P_H(M_c(X)))$, 则 $\overline{\bigcup W}\in M_c(X)$.

设 K 是 Top_0 的子范畴,称在范畴 K 中的对象为 K-空间.

定义 4[16]　设 X 是 T_0 空间. 若存在 K-空间 $\overline{X}$ 和连续映射 $\mu:X\to\overline{X}$ 满足对任意从 X 到 K-空间 Y 的连续映射 f, 存在唯一的连续映射 $f^*:\overline{X}\to Y$ 使 $f^*\cdot\mu=f$, 即图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "f"'] & \overline{X} \arrow[d, dashed, "f^*"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

可交换,则称 $(\overline{X},\mu)$ 是 X 的 K-反射.

2　主要内容

首先介绍 M. Erńe[2]引入的 3 类弱 sober 空间.

定义 5[2]　设 X 是 T_0 空间.

1) 称 X 是拟 sober 空间,若每个既约闭集是一个定向集的 cut 闭,即 $\forall I\in M_c(X)$,存在定向集 $D\subseteq X$ 使 $I=D^{\delta}$.

2) 称 X 是弱 sober 空间,若对 X 的任意既约闭集 A, $A=A^{\delta}$.

3) 称 X 是 cut 空间,若对 X 的任意定向集 D, $\overline{D}=D^{\delta}$.

对任意偏序集 P,在 Alexandroff 拓扑空间 $(P,\gamma(P))$ 上的非空既约子集恰好是在 P 中的定向集.

命题 4　对任意偏序集 P, 以下 3 个条件等价:

1) $(P,\gamma(P))$ 是拟 sober 空间;

2) $(P,\gamma(P))$ 是弱 sober 空间;

3) $(P,\gamma(P))$ 是 cut 空间.

众所周知, $X^s=P_H(M_c(X))$ 和映射 $\eta_X:X\to X^s$, $x\mapsto\overline{\{x\}}$ 是空间 X 的 sober 化[12]. Zhao Dongsheng 等[8]证明了以有界 sober 空间为对象、以连续映射为态射的范畴 $BSob$ 是 Top_0 的反射子范畴. 不同于 Sob 和 $BSob$, k-有界 sober 空间构成的范畴 $KBSob$ 不是 Top_0 的反射子范畴[3]. 一个自然的问题是: $QSob$、$WSob$ 和 Top_{cut} 是 Top_0 的反射子范畴吗? Xu Xiaoquan 等[11]对此问题给出了否定解答.

本节基于偏序集的 Alexandroff 空间给出另一个否定解答. 对 T_0 空间 X,记 $M_c^{\delta}(X)=\{B\in M_c(X):B=B^{\delta}\}$. 举例表明 $P_H(M_c^{\delta}(X))$ 一般不是弱 sober 的.

例 1　设 $P=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}\cup\{b_1,b_2\}\cup\{c\}$, 序关系(见图 1)定义如下:

1) $a_1<a_2<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots$;

2) $\forall n\in\mathbf{N}$, $a_n<b_1$, $a_n<b_2$, 且 b_1、b_2 是不可比较的;

3) $c<b_1$, $c<b_2$.

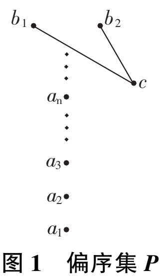

图 1　偏序集 P

考虑在 P 上的 Scott 拓扑空间 $\Sigma(P)$.

1) $\Sigma(P)$ 不是弱 sober 空间. 这是因为 $A=\{a_n:n\in\mathbf{N}\}\in M_c(\Sigma(P))$,但是 $A\neq A^{\delta}=A\cup\{c\}$.

2) $P_H(M_c^{\delta}(\Sigma(P)))$ 不是弱 sober 空间. 容易验证 $M_c^{\delta}(\Sigma(P))=\{\overline{\{x\}}:x\in P\}$. 选取 $W=\{\overline{\{a_n\}}:n\in\mathbf{N}\}$. 断定 W 是在 $P_H(M_c^{\delta}(\Sigma(P)))$ 中的既约闭集. W 的既约性是显然的.

下证 $W=cl_{P_H(M_c^\delta(\Sigma(P)))}W$.

否则，$\exists\ A\in cl_{P_H(M_c^\delta(\Sigma(P)))}W\setminus W$，则 $A\in\{\overline{\{b_1\}},\overline{\{b_2\}},\overline{\{c\}}\}$. $\forall x\in\{b_1,b_2,c\}$，总有 $\overline{\{x\}}\in\Diamond\uparrow x$ 且 $\Diamond\uparrow x$ 开于 $P_H(M_c^\delta(\Sigma(P)))$，但是 $W\cap\Diamond\uparrow x=\varnothing$，因此 $\overline{\{x\}}\notin cl_{P_H(M_c^\delta(\Sigma(P)))}W$，矛盾. 所以 W 是在 $P_H(M_c^\delta(\Sigma(P)))$ 中的既约闭集. 由于 $W^\uparrow=\{\downarrow b_1,\downarrow b_2\}$ 且 $\downarrow c\in W^\delta\setminus W$，从而 $W^\delta\neq W$. 故 $P_H(M_c^\delta(\Sigma(P)))$ 不是弱 sober 空间.

定理 1 若 X 是弱 sober 空间，则 $P_H(M_c^\delta(X))$ 是弱 sober 空间.

证 假设 X 是弱 sober 空间，$W\in M(P_H(M_c^\delta(X)))$. 令 $A=\overline{\bigcup W}$，由命题 3 知，$A\in M_c(X)$. 因为 X 是弱 sober 空间，故 $A=A^\delta$，从而 $A\in M_c^\delta(X)$.

下证 $cl_{P_H(M_c^\delta(X))}\{A\}=cl_{P_H(M_c^\delta(X))}W$. 设 U 开于 X，则 $A\in\Diamond U\Leftrightarrow A\cap U\neq\varnothing\Leftrightarrow\overline{\bigcup W}\cap U\neq\varnothing\Leftrightarrow\bigcup W\cap U\neq\varnothing\Leftrightarrow W\cap\Diamond U\neq\varnothing$. 因此 $cl_{P_H(M_c^\delta(X))}\{A\}=cl_{P_H(M_c^\delta(X))}W$. 显然 A 是 W 的一个上界，从而 $W^\delta\subseteq\downarrow_{M_c^\delta(X)}A=cl_{P_H(M_c^\delta(X))}\{A\}=\overline{W}$. 由于 $\overline{W}\subseteq\overline{W}^\delta=W^\delta$，则 $\overline{W}=W^\delta$，所以 $P_H(M_c^\delta(X))$ 是弱 sober 空间.

下面的例子说明某些不是弱 sober 的空间，它的弱 sober 化不存在. 该例子的构造受在文献[3]中的定理 3.3 的启发.

例 2 令 $P=\mathbf{N}\cup\{T\}$，在 P 上的序关系为：$\forall n\in\mathbf{N}$，$n<n+1$ 且 $n<T$. 考虑 P 的 Alexandroff 空间 $(P,\gamma(P))$，则有 $M_c(P,\gamma(P))=\{\downarrow x:x\in P\}\cup\mathbf{N}$. 由于 $\mathbf{N}\neq\mathbf{N}^\delta=P$，因此 $(P,\gamma(P))$ 不是弱 sober 空间. 下面用反证法证明 $(P,\gamma(P))$ 的弱 sober 化不存在.

假设 (Y,i) 是 $(P,\gamma(P))$ 的弱 sober 化. 令 $Q=\mathbf{N}\cup\{T_1,T_2,T_3\}$，$Q$ 上的序关系为：$\forall n\in\mathbf{N}$，$n<T_1$，$n<T_2$，$n<n+1$ 且 $T_1<T_3$，$T_2<T_3$，但 T_1、T_2 是不可比的(见图 2).

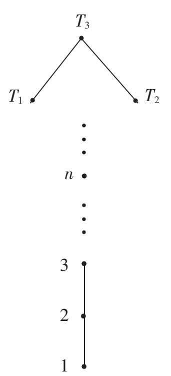

图 2 偏序集 Q

易证 $(Q,\gamma(Q))$ 是弱 sober 空间. 定义映射 $f:(P,\gamma(P))\to(Q,\gamma(Q))$ 为

$$f(x)=\begin{cases}x,\ x\in\mathbf{N},\\T_3,x=T.\end{cases}$$

易知 f 连续.

由于 (Y,i) 是 $(P,\gamma(P))$ 的弱 sober 化，所以存在唯一的连续映射 $\bar{f}:Y\to(Q,\gamma(Q))$ 使 $\bar{f}\cdot i=f$，即图

$$\begin{tikzcd}(P,\gamma(P)) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & (Q,\gamma(Q))\end{tikzcd}$$

可交换.

因为 i 连续，所以由命题 2 知，$i(\mathbf{N})$ 是 Y 的既约集且 $i(T)$ 是 $i(\mathbf{N})$ 的上界. 下面分 2 种情形讨论.

情形 1 $i(T)\in i(\mathbf{N})^{\delta_Y}$.

注意到 $i(T)$ 是 $i(\mathbf{N})$ 的上界. 若 $i(T)\in i(\mathbf{N})^{\delta_Y}$，则 $i(\mathbf{N})^{\delta_Y}=\downarrow i(T)$，从而根据 Y 的弱 sober 性，$cl_Y i(\mathbf{N})=i(\mathbf{N})^{\delta_Y}=\downarrow i(T)$. 由于 $f(T)=\bar{f}\cdot i(T)=T_3$，$\{T_3\}$ 是 $(Q,\gamma(Q))$ 中开集且 $\bar{f}$ 连续，则 $i(T)\in\bar{f}^{-1}(T_3)$ 开于 Y，因此 $\bar{f}^{-1}(T_3)\cap i(\mathbf{N})\neq\varnothing$. 这就意味着 $\exists n_0\in\mathbf{N}$ 使 $\bar{f}(i(n_0))=T_3$，矛盾于 $\forall n\in\mathbf{N}$，$\bar{f}(i(n))=f(n)=n$.

情形 2 $i(T)\notin i(\mathbf{N})^{\delta_Y}$.

由于 $i(T)$ 是 $i(\mathbf{N})$ 的上界，所以在这种情形下，存在 $i(\mathbf{N})$ 的一个上界 x_0 使 $i(T)\nleq x_0$. 接下来分 2 种子情形来讨论.

1) $\bar{f}^{-1}(T_1)\cup\bar{f}^{-1}(T_2)\neq\varnothing$.

$\exists x_1\in Y$ 使 $\bar{f}(x_1)=T_1$ 或 $\bar{f}(x_1)=T_2$. 定义映射 $g:(Q,\gamma(Q))\to(Q,\gamma(Q))$，

$$g(x)=\begin{cases}x,\ \ x\in\mathbf{N},\\T_3,x\in\{T_1,T_2,T_3\},\end{cases}$$

则 g 连续且 $(g\cdot\bar{f})\cdot i=g\cdot(\bar{f}\cdot i)=g\cdot f=f$. 由 $\bar{f}$ 的唯一性知 $g\cdot\bar{f}=\bar{f}$. 但是 $g\cdot\bar{f}(x_1)=T_3$，这矛盾于 $\bar{f}(x_1)=T_1$ 或 $\bar{f}(x_1)=T_2$.

2) $\bar{f}^{-1}(T_1)\cup\bar{f}^{-1}(T_2)=\varnothing$.

由于 x_0 是 $i(\mathbf{N})$ 的上界且 $\bar{f}$ 连续，所以 $\forall n\in\mathbf{N}$，$n=f(n)=\bar{f}\cdot i(n)\leqslant\bar{f}(x_0)$，因此 $\bar{f}(x_0)=T_3$. 定义映射 $h:Y\to(Q,\gamma(Q))$，

$$h(x)=\begin{cases}\bar{f}(x), & x\in\bar{f}^{-1}(\mathbf{N}),\\ T_1, & x\in\bar{f}^{-1}(T_3)\cap\downarrow x_0,\\ T_3, & x\in\bar{f}^{-1}(T_3)\cap Y\setminus\downarrow x_0.\end{cases}$$

设 B 是 $(Q,\gamma(Q))$ 的闭子集. 若 $B\subseteq\mathbf{N}$, 则 $h^{-1}(B)=\bar{f}^{-1}(B)$,

$h^{-1}(\downarrow T_1)=h^{-1}(T_1\cup\mathbf{N})=(\bar{f}^{-1}(T_3)\cap\downarrow x_0)\cup\bar{f}^{-1}(\mathbf{N})=(\bar{f}^{-1}(T_3)\cup\bar{f}^{-1}(\mathbf{N}))\cap(\downarrow x_0\cup\bar{f}^{-1}(\mathbf{N}))=Y\cap(\downarrow x_0\cup\bar{f}^{-1}(\mathbf{N}))=\downarrow x_0\cup\bar{f}^{-1}(\mathbf{N})$,

所以 $h^{-1}(\downarrow T_1)$ 是 $(Q,\gamma(Q))$ 的闭子集.

又因为 $h^{-1}(\downarrow T_2)=h^{-1}(\mathbf{N})$, 所以 $h^{-1}(\downarrow T_2)$ 和 $h^{-1}(\downarrow T_1\cup\downarrow T_2)$ 都闭于 $(Q,\gamma(Q))$. 因此 h 连续.

此外, 若 $x\in\mathbf{N}$, 则 $x=f(x)=\bar{f}\cdot i(x)$, 因此 $i(x)\in\bar{f}^{-1}(\mathbf{N})$, $h\cdot i(x)\in\bar{f}\cdot i(x)=f(x)$. 由于 $T_3=f(T)=\bar{f}\cdot i(T)$, 从而 $i(T)\in\bar{f}^{-1}(T_3)\cap Y\setminus\downarrow x_0$, 所以 $h\cdot i(T)=T_3=f(T)$. 因此 $h\cdot i=f$. 由 $\bar{f}$ 的唯一性知 $\bar{f}=h$. 但是 $\bar{f}(x_0)=T_3$, $h(x_0)=T_1$, 矛盾.

综上所述, $(P,\gamma(P))$ 的弱 sober 化不存在.

由命题 4 和上述例子可得如下定理.

定理 2　$QSob$、$WSob$ 和 Top_{cut} 都不是 Top_0 的反射子范畴.

3　参考文献

[1] BEZHANISHVILI G, HARDING J. Raney algebras and duality for T_0 spaces [J]. Applied Categorical Structures, 2020, 28(6): 963-973.

[2] ERŃE M. Categories of locally hypercompact spaces and quasicontinuous posets [J]. Applied Categorical Structures, 2018, 26(5): 823-854.

[3] LU Jing, WANG Kaiyun, WU Guohua, et al. Nonexistence of k-bounded sobrification [J]. Houston Journal of Mathematics, 2022, 48(4): 827-842.

[4] SHAN Qidong, BAO Meng, WEN Xinpeng, et al. On almost sober spaces [J]. Topology and Its Applications, 2022, 305: 107896.

[5] WEN Xinpeng, XU Xiaoquan. On some kinds of weakly sober spaces [J]. Topology and Its Applications, 2020, 272: 107079.

[6] 杨毅, 鲍猛, 徐晓泉. k-有界 sober 空间的收缩与 Smyth 幂空间 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2022, 38(1): 13-24.

[7] 叶炜. 有界 sober 空间和有界 well-filtered 空间的若干性质 [D]. 南昌: 江西师范大学, 2021.

[8] ZHAO Dongsheng, FAN Taihe. Dcpo-completion of posets [J]. Theoretical Computer Science, 2010, 411(22/23/24): 2167-2173.

[9] ZHAO Dongsheng, HO W K. On topologies defined by irreducible sets [J]. Journal of Logical and Algebraic Methods in Programming, 2015, 84(1): 185-195.

[10] ZHANG Xiaoyuan, BAO Meng, XU Xiaoquan. On function spaces related to some kinds of weakly sober spaces [J]. AIMS Mathematics, 2022, 7(5): 9311- 9324.

[11] XU Xiaoquan, WEN Xinpeng. Non-reflective categories of some kinds of weakly sober spaces [J]. Topology and Its Applications, 2022, 314: 108126.

[12] GIERZ G, HOFMANN K H, KEIMEL K, et al. Continuous lattices and domains [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

[13] ENGELKING R. General topology [M]. Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[14] 徐晓泉. 序与拓扑 [M]. 北京: 科学出版社, 2016.

[15] SCHALK A. Algebras for generalized power constructions [D]. Darmstadt: Technische Hochschule Darmstadt, 1993.

[16] XU Xiaoquan. A direct approach to K-reections of T_0 spaces [J]. Topology and Its Applications, 2020, 272: 107076.

The Example of Nonexistence of Weakly Sobrification

ZHANG Xiaoyuan[1], XU Xiaoquan[2]*

(1. School of Big Data Science, Hebei Finance University, Baoding Hebei 071051, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou Fujian 363000, China)

Abstract: In this paper, based on the Alexandroff spaces of posets, it is shown that none of the category of all quasisober spaces, that of all weakly sober spaces, that of all cut spaces is reflective in the category of all T_0 spaces with continuous mappings in a different way.

Key words: quasisober spaces; weakly sober spaces; cut spaces; reflective subcategory

(责任编辑:曾剑锋)